

# Chapitre 1

## Intégration et espaces vectoriels normés

### 1.1 Les espaces vectoriels normés des fonctions intégrables

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré, avec  $\mu$  une mesure positive. Comme on l'a vu au chapitre précédent, l'ensemble  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  peut être muni de façon naturelle d'une structure d'espace vectoriel. Par ailleurs, on a vu, voir chapitre ?? que sur l'ensemble des fonctions continues, il est possible d'introduire une norme (norme de la moyenne) mais qu'avec cette norme l'espace vectoriel n'est pas complet. L'objectif de ce chapitre est d'étendre cette norme de la moyenne à un espace vectoriel plus gros que l'ensemble des fonctions continues, en fait à un espace vectoriel normé complet. Pour cela on va se servir de l'espace  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ .

**Proposition 1.1** Soit  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  une fonction et soit  $A \in \mathcal{A}$ , on a :

$$\begin{aligned}\mu(A) = 0 &\implies \int_A f \, d\mu = 0 \\ \int_\Omega |f| \, d\mu = 0 &\implies f = 0 \text{ pp}\end{aligned}$$

**Preuve :** La démonstration est traitée dans l'exercice ??.

Cette proposition permet de montrer notamment que deux fonctions égales presque partout ont même intégrale et réciproquement. Mais cette proposition montre aussi qu'il n'est pas possible d'étendre la norme de la moyenne directement sur l'ensemble  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , vu que la seconde propriété de 1.1 montre que l'application  $f \mapsto \int_\Omega |f| \, d\mu$  n'est pas définie.

**Définition 1.2** On définit alors l'ensemble  $\mathbf{L}^1$  constitué des classes d'équivalence des fonctions de  $\mathcal{L}^1$  pour la relation

$$f \mathcal{R} g \iff f = g \text{ pp}$$

En gros, l'ensemble  $\mathbf{L}^1$  est constitué des fonctions intégrables sans que l'on différencie les fonctions égales presque partout. Cet ensemble est un espace vectoriel grâce aux propriétés de linéarité des intégrales. Comme pour l'ensemble  $\mathcal{L}^1$ , la notation  $\mathbf{L}^1$  est condensée, elle suppose implicitement la

donnée de :  $\Omega$  un ensemble,  $\mathcal{A}$  une tribu et  $\mu$  une mesure positive. En cas de doute ou de risque de confusion, il vaut mieux noter  $\mathbf{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ .

Par ailleurs, travailler modulo une relation d'équivalence est assez classique en mathématique, la notation usuelle est :

$$\boxed{\mathbf{L}^1 \simeq \mathcal{L}^1 / \mathcal{R}}$$

**Théorème 1.3** *L'application*

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\longmapsto \int_{\Omega} |f| d\mu \end{aligned}$$

est une norme, on la note  $\| \cdot \|_1$  :

$$\boxed{\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f| d\mu}$$

**Preuve :** On a récupéré le caractère défini. De plus la propriété 1.1 montre que le résultat de l'intégrale ne dépend pas du représentant choisi dans la classe d'équivalence. Ainsi les propriétés *ii* et *iii* (l'inégalité triangulaire) de la définition d'une norme, voir ??, valables sur  $\mathcal{L}^1$  le sont aussi sur  $\mathbf{L}^1$ . ■

**Théorème 1.4**

$\left\{ \right\} \quad L'ensemble (\mathbf{L}^1, \| \cdot \|_1) \text{ est un espace de Banach.}$

On a rappelé au début de ce chapitre que l'ensemble des fonctions continues intégrables sur  $\Omega$  par exemple muni de la norme  $\| \cdot \|_1$  est bien un espace vectoriel normé, mais qu'il n'est pas complet. On peut aussi montrer que l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact est dense dans  $\mathcal{L}^1$ . Ainsi, modulo la relation d'équivalence pp, l'espace  $\mathbf{L}^1$  est le plus petit espace complet contenant les fonctions continues intégrables.

**Théorème 1.5** *Th. de Lebesgue sur  $\mathbf{L}^1$ . Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables,  $f$  une fonction mesurable et  $g$  une fonction positive mesurable. Le premier théorème énoncé ci-dessus (??) est vrai aussi sur  $\mathbf{L}^1$  mais on a en plus :*

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} f_n \longrightarrow f \text{ pp} \\ \exists g \in \mathcal{L}^1 \quad \forall n \quad |f_n| \leq g \text{ pp} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} f, f_n \in \mathbf{L}^1 \\ \lim_n \|f_n - f\|_1 = 0 \end{array} \right.} \quad (1.1)$$

Bien noter que les hypothèses des deux théorèmes ?? et 1.5 sont identiques, mais pas les conclusions. Noter aussi que les fonctions  $f_n$  et  $f$  dans le théorème 1.5 sur  $\mathbf{L}^1$  n'ont pas exactement le même sens à gauche et à droite du symbole implication : à gauche elles sont considérées comme des fonctions, donc dans  $\mathcal{L}^1$ , à droite comme des vecteurs de l'espace  $\mathbf{L}^1$ . On peut aussi mémoriser cette différence en notant que le théorème ?? montre que la convergence majorée implique la convergence des intégrales alors que le second théorème 1.5 montre que la convergence majorée implique la convergence en norme.

**Définition 1.6** *L'espace  $\mathbf{L}^2$ .*

$\left\{ \begin{array}{l} \text{De la même façon que sur } \mathbf{L}^1, \text{ on définit l'espace } \mathbf{L}^2 \text{ des fonctions de carré} \\ \text{intégrable modulo la relation d'égalité presque partout : } f \in \mathbf{L}^2 \Leftrightarrow |f|^2 \in \mathbf{L}^1. \end{array} \right.$

On écrit ainsi :

$$f \in \mathbf{L}^2 \iff \int_{\Omega} |f|^2 dm < +\infty$$

**Proposition 1.7** *L'application :*

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2 \times \mathbf{L}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \int_{\Omega} fg dm \end{aligned} \quad (1.2)$$

définit un produit scalaire, on note  $\|\cdot\|_2$  la norme associée.

On a donc :

$$\forall f \in \mathbf{L}^2 \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} |f|^2 dm < +\infty}$$

**Théorème 1.8**

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Muni du produit scalaire (1.2), l'espace } \mathbf{L}^2 \text{ est un espace de Hilbert.} \end{array} \right.$

En pratique (en physique notamment), ce sont ces espaces qui sont utilisés, il reste seulement à préciser l'ensemble  $\Omega$  et la mesure  $m$  selon le cas considéré. On pourra bien sûr utiliser tous les résultats connus sur les espaces de Hilbert, en particulier l'inégalité de Cauchy-Schwarz que l'on peut mettre sous la forme :

$$\forall f, g \quad f, g \in \mathbf{L}^2 \implies \begin{cases} fg \in \mathbf{L}^1 \\ \|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \end{cases}$$

Pour démontrer l'appartenance de  $fg$  à  $\mathbf{L}^1$ , en fait déjà prouvée pour écrire la proposition 1.7, on utilise l'inégalité  $ab \leq a^2/2 + b^2/2$ .

**Proposition 1.9** *Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, m)$  un espace mesuré, on a :*

$$m(\Omega) < +\infty \implies \mathbf{L}^2 \subset \mathbf{L}^1$$

*La condition  $m(\Omega) < +\infty$  est nécessaire.*

**Preuve :** Soit  $f \in \mathbf{L}^2$ , on peut écrire :  $1 \cdot |f| \leq 1^2/2 + |f|^2/2$ . En supposant  $m(\Omega) < +\infty$ , le terme majorant est intégrable, la proposition ?? montre qu'il en est de même du terme  $1 \cdot |f|$  ce qui montre  $f \in \mathbf{L}^1$ . On en déduit l'inclusion voulue.

Pour montrer que la condition  $m(\Omega) < +\infty$  est nécessaire, il suffit de considérer un exemple. On prend  $m$  la mesure de Lebesgue,  $\Omega = [1, +\infty[$  et la fonction  $f(x) = 1/x$  qui est bien de carré intégrable sur  $\Omega$  sans l'être elle-même. ■

**Définition 1.10** *De la même façon, on peut définir l'espace  $\mathbf{L}^p$  avec la norme :*

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f|^p dm \right)^{1/p}$$

*pour tout entier  $p$  vérifiant :  $1 \leq p < +\infty$ .*

Il est important de noter que tous ces espaces  $\mathbf{L}^p$  sont définis pour des mesures (positives) arbitraires, on peut prendre la mesure de Lebesgue ou toute autre comme par exemple la mesure comptable  $\mu$ . Dans ce dernier cas, l'intégrale correspond à la série, on a formellement  $\int |f|^p d\mu = \sum_n |f_n|^p$  et tous les théorèmes (vus ci-dessus et énoncés ci-dessous) ont une “traduction” en terme de série. Par ailleurs, on peut aussi définir l'ensemble  $\mathbf{L}^\infty$  des fonctions mesurables dites essentiellement bornées : fonctions pour lesquelles il existe une constante réelle  $M$  vérifiant  $|f(x)| \leq M$  presque partout. En prenant la borne inférieure des réels  $M$  vérifiant une telle propriété on définit alors une norme notée  $\|\cdot\|_\infty$  qui confère à l'ensemble  $\mathbf{L}^\infty$  une structure d'espace vectoriel complet (un espace de Banach) comme les autres ensembles  $\mathbf{L}^p$ .

**Proposition 1.11** *Soit  $p$  un réel vérifiant  $1 < p < +\infty$ . Le dual topologique  $(\mathbf{L}^p)^*$  de  $\mathbf{L}^p$  est isomorphe à  $\mathbf{L}^q$  avec :*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

En particulier, pour  $p = 2$ , on retrouve le fait que le dual topologique d'un espace de Hilbert soit isomorphe à cet espace de Hilbert. Par ailleurs, on peut montrer que le dual topologique de  $\mathbf{L}^1$  est isomorphe à  $\mathbf{L}^\infty$  mais qu'en revanche le dual topologique de  $\mathbf{L}^\infty$  est isomorphe à un espace strictement plus grand que  $\mathbf{L}^1$ .

## 1.2 Complément : dérivée faible

Comme on l'a vu précédemment, on a plongé l'ensemble des fonctions continues intégrables dans un espace plus grand qui est complet. Cette section traite des aspects liés à la dérivation. L'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  par exemple peut être muni d'une norme bien adaptée, voir ci-après, mais n'est pas non plus un ensemble complet.

Pour simplifier, on travaille dans toute cette section avec l'hypothèse  $\Omega = ]0, 1[$  et  $\mu$  la mesure de Lebesgue notée  $m$ . On note aussi  $\bar{\Omega} = [0, 1]$  le compact, fermeture de  $\Omega$ .

### 1.2.1 Construction de la dérivée faible

**Définition 1.12** *Dans toute la suite de ce chapitre, on prend les notations suivantes :*

$$\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) = \{u \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \bar{\Omega}\}$$

$$\mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega}) = \{u \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \mid u(0) = u(1) = 0\}$$

On introduit aussi parfois l'ensemble  $\mathcal{C}_K^1(\bar{\Omega})$ , l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\bar{\Omega}$  à support compact (inclus dans  $\Omega$ ). On a bien sûr  $\mathcal{C}_K^1(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})$  avec l'inclusion réciproque fausse.

**Théorème 1.13** *L'ensemble  $\mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})$  est dense dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ .*

Ce théorème de densité est admis, on peut seulement rappeler que l'ensemble  $\mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})$  est effectivement inclus dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  vu qu'une fonction continue sur un compact est bornée donc de carré intégrable sur un compact.

**Définition 1.14** *une fonction  $f$  de  $\mathbf{L}^2$  est dite faiblement dérivable s'il existe une fonction que nous noterons  $f^\vee$  vérifiant :  $f^\vee \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  et :*

$$\boxed{\forall g \in \mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega}) \quad \int_{\Omega} f g' \, dm = - \int_{\Omega} f^\vee g \, dm} \quad (1.3)$$

où l'on a noté  $g'$  la dérivée au sens classique de  $g$ . En pratique, pour montrer qu'une fonction de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  est faiblement dérivable, il faut vérifier qu'il existe une fonction  $f^\vee$  vérifiant l'égalité (1.3) et que cette fonction appartient bien à  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . La démonstration se fait en deux étapes.

**Proposition 1.15** *Soit  $f \in \mathbf{L}^2$  si  $f$  est faiblement dérivable alors la dérivée faible est unique.*

**Preuve :** Supposons qu'il en existe deux :  $f_1^\vee$  et  $f_2^\vee$ . Notons  $u = f_1^\vee - f_2^\vee$ . La définition (1.3) montre que l'on a :  $\int_{\Omega} u g \, dm = 0$  quelle que soit la fonction  $g$  dans  $\mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , grâce au théorème de densité admis 1.13, on sait qu'il existe une fonction  $g \in \mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})$  vérifiant  $\|u - g\|_2 < \varepsilon$ . Dès lors, on obtient successivement :

$$\|u\|_2^2 = \int_{\Omega} u \cdot u \, dm = \int_{\Omega} (u g + u(u - g)) \, dm \leq \int_{\Omega} u g \, dm + \|u(u - g)\|_1 \leq 0 + \|u\|_2 \|u - g\|_2 < \varepsilon \|u\|_2$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On en déduit :  $\|u\|_2 < \varepsilon$  ce qui conduit à  $u = 0$  dans  $\mathbf{L}^2$  et donc à l'unicité de la dérivée faible. ■

**Proposition 1.16** *Si l'on a  $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ , alors  $f$  est faiblement dérivable et  $f^\vee = f'$ .*

**Preuve :** Soit  $g \in \mathcal{C}_0^1$ . On peut intégrer par partie :

$$\int_{\Omega} f g' \, dm = \int_0^1 f g' \, dx = [f g]_0^1 - \int_0^1 f' g \, dx = - \int_0^1 f' g \, dx = - \int_{\Omega} f' g \, dx$$

en ayant utilisé la nullité de  $g$  aux extrémités de l'intervalle d'intégration. La fonction  $f'$  vérifie la relation (1.3). Par ailleurs, c'est une fonction continue sur le compact  $\bar{\Omega}$ , elle y est bornée, donc de carré intégrable. Cette fonction convient donc et par unicité, c'est bien la dérivée faible. ■

En d'autres termes si  $f$  est fortement dérivable, elle l'est faiblement et la dérivée faible coïncide avec la dérivée forte (ou classique). La dérivée faible est donc une généralisation de la dérivation usuelle et la démonstration et la définition indiquent que ce qui est requis pour cette faible dérivabilité, c'est l'intégration par parties (il n'est pas question par exemple d'une limite du taux d'accroissement). La réciproque est fausse, voir exercice 1.30.

Une des conséquences de la proposition 1.16 est que l'on note souvent la dérivée faible avec la même notation que pour la dérivée forte. Il est alors sous-entendu que  $f'$  désigne la dérivée au sens fort quand cette dérivée existe et au sens faible sinon.

### 1.2.2 Quelques propriétés de la dérivée faible

**Proposition 1.17** *L'ensemble des fonctions faiblement dérivables forme un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{L}^2$  et la dérivée faible d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des dérivées faibles.*

**Preuve :** Soit  $(f_1, f_2)$  deux fonctions faiblement dérivables et soit  $(\lambda_1, \lambda_2)$  deux scalaires. On sait déjà que la fonction  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$  est de carré intégrable. Soit  $g \in \mathcal{C}_0^1$ . On a successivement :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) g' dm &= \lambda_1 \int_{\Omega} f_1 g' dm + \lambda_2 \int_{\Omega} f_2 g' dm = -\lambda_1 \int_{\Omega} f_1^\vee g dm - \lambda_2 \int_{\Omega} f_2^\vee g dm \\ &= - \int_{\Omega} (\lambda_1 f_1^\vee + \lambda_2 f_2^\vee) g dm \end{aligned}$$

en utilisant deux fois la linéarité de l'intégrale. La fonction  $\lambda_1 f_1^\vee + \lambda_2 f_2^\vee$  est dans  $\mathbf{L}^2$  et vérifie (1.3), on en déduit le résultat annoncé. ■

**Proposition 1.18** *Si  $f$  est une fonction faiblement dérivable et si  $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ , alors le produit  $uf$  est une fonction faiblement dérivable avec :*

$$(uf)^\vee = u'f + uf^\vee \quad (1.4)$$

**Preuve :** On remarque d'abord que le produit  $uf$  est bien une fonction de  $\mathbf{L}^2$ , comme produit d'une fonction bornée et d'une fonction de  $\mathbf{L}^2$ . Le calcul de la dérivée faible a donc bien un sens. Soit ensuite  $g \in \mathcal{C}_0^1$ , un simple calcul donne successivement :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (uf) g' dm &= \int_{\Omega} f (ug') dm = \int_{\Omega} f [(ug)' - u'g] dm = \int_{\Omega} f (ug)' dm - \int_{\Omega} f u' g dm \\ &= - \int_{\Omega} f^\vee u g dm - \int_{\Omega} f u' g dm = - \int_{\Omega} (f^\vee u + f u') g dm \end{aligned}$$

La fonction  $f^\vee$  est élément de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  vu que la fonction  $f$  est supposée faiblement dérivable, les fonctions  $u$  et  $u'$  étant continues sur le compact  $\bar{\Omega}$  elles y sont bornées, on en déduit que la fonction  $f^\vee u + f u'$  est bien un élément de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . Finalement, la fonction  $uf$  est effectivement faiblement dérivable avec la dérivée faible donnée par (1.4). ■

**Lemme 1.19** *Soit  $f \in \mathbf{L}^2$  une fonction faiblement dérivable, on a la propriété :*

$$f^\vee = 0 \quad \implies \quad f = cste$$

*La réciproque est évidemment vraie.*

Ne pas oublier que l'espace de travail est  $\mathbf{L}^2$  et pas  $\mathcal{L}^2$ , aussi l'écriture  $f = cste$  signifie que l'un des représentants de la classe d'équivalence (relation d'égalité presque partout) de  $f$  est une fonction constante. Dans  $\mathcal{L}^2$ , on peut aussi écrire  $f = cste$  pp. Nous admettons ce lemme.

**Proposition 1.20** *Soit  $f \in \mathbf{L}^2$  une fonction supposée faiblement dérivable, on a*

$$f^\vee = h \text{ avec } h \text{ continue sur } \bar{\Omega} \implies \exists \hat{f} \quad \hat{f} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}), \hat{f}' = h \text{ et } f = \hat{f} \quad (1.5)$$

**Preuve :** On se donne donc  $f$  une fonction faiblement dérivable dont la dérivée faible est égale à une fonction  $h$  supposée continue sur  $\bar{\Omega}$ . La démonstration utilise le résultat (1.8) qui fait l'objet de l'exercice 1.31. On pose  $F(x) = \int_0^x h(t) dt$ . La fonction  $h$  étant continue, la fonction  $F$  est dérivable au sens classique et on a  $F' = h$ . La propriété 1.16 montre que  $F$  est également faiblement dérivable avec  $F^\vee = h$ . On a donc  $(F - f)^\vee = 0$ . Le lemme 1.19 montre que l'on a  $F - f = cste$ , soit aussi  $f = F + cste$ . En posant  $\hat{f}$  le membre de droite de cette égalité, on a bien démontré la proposition. ■

Une fonction faiblement dérivable à dérivée régulière est donc en fait fortement dérivable (toujours modulo la relation presque partout).

### 1.2.3 Un premier espace de Sobolev

Pour éviter tout risque de confusion, nous noterons  $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2}$  la norme usuelle de  $\mathbf{L}^2$  issue du produit scalaire usuel que nous notons  $(\cdot, \cdot)$ . Pour  $u \in \mathbf{L}^2$ , on peut donc écrire :

$$\|u\|_{\mathbf{L}^2}^2 = (u, u) = \int_{\Omega} u^2 dm$$

en remplaçant  $u^2$  par  $|u|^2$  dans le cas de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

#### Définition 1.21

On définit et on note  $\mathbf{H}^1$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{L}^2$  constitué des fonctions de  $\mathbf{L}^2$  faiblement dérivable.

$$\mathbf{H}^1 = \{u \in \mathbf{L}^2 \mid \exists u^\vee \in \mathbf{L}^2 \quad \forall g \in \mathcal{C}_0^1 \quad (u, g') = -(u^\vee, g)\}$$

Comme précédemment,  $\mathbf{H}^1$  est une notation abrégée de  $\mathbf{H}^1(\Omega, \mathcal{A}, m)$ .

**Proposition 1.22** On a les inclusions :

$$\mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \subset \mathbf{H}^1 \subset \mathbf{L}^2$$

**Preuve :** C'est immédiat avec la proposition 1.16 et en se rappelant qu'une fonction continue sur un compact est de carré intégrable. ■

**Définition 1.23** On définit sur  $\mathbf{H}^1 \times \mathbf{H}^1$  l'application :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^1 \times \mathbf{H}^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto ((u, v)) = (u, v) + (u^\vee, v^\vee) \end{aligned}$$

**Proposition 1.24** L'application  $((\cdot, \cdot))$  définit un produit scalaire sur  $\mathbf{H}^1$ .

**Preuve :** Par linéarité du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$  sur  $\mathbf{L}^2$ , et par linéarité de la dérivée faible, l'application  $((\cdot, \cdot))$  est bien une forme bilinéaire. Pour la même raison, elle est également symétrique et positive. Si l'on suppose  $((u, u)) = 0$  alors on a notamment  $(u, u) = 0$  ce qui entraîne  $u = 0$ , l'application  $((\cdot, \cdot))$  est donc définie et il s'agit bien finalement d'un produit scalaire. ■

**Définition 1.25** On note  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1}$  la norme issue du produit scalaire  $((\cdot, \cdot))$ .

Pour  $u \in \mathbf{H}^1$ , on a donc explicitement

$$\|u\|_{\mathbf{H}^1}^2 = \|u\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|u^\vee\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \int_{\Omega} u^2 dm + \int_{\Omega} (u^\vee)^2 dm$$

Cette norme permet de contrôler une fonction et sa dérivée.

**Proposition 1.26** Pour  $u \in \mathbf{H}^1$ , on a :

$$\|u\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|u\|_{\mathbf{H}^1} \quad \text{et} \quad \|u^\vee\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|u\|_{\mathbf{H}^1} \quad (1.6)$$

**Preuve :** C'est immédiat à partir de la définition de la norme sur  $\mathbf{H}^1$ . ■

### Théorème 1.27

**{** *L'espace  $(\mathbf{H}^1, ((\cdot, \cdot)))$  est un espace de Hilbert.*

**Preuve :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy de  $(\mathbf{H}^1, ((\cdot, \cdot)))$ . Les inégalités (1.6) montrent que les suites  $(u_n)$  et  $(u_n^\vee)$  sont de Cauchy dans  $\mathbf{L}^2$ . Or cet espace est complet, il existe donc deux fonctions  $u \in \mathbf{L}^2$  et  $v \in \mathbf{L}^2$  vérifiant :

$$\|u_n - u\|_{\mathbf{L}^2} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \|u_n^\vee - v\|_{\mathbf{L}^2}$$

quand  $n$  tend vers l'infini. La convergence forte dans  $\mathbf{L}^2$  implique la convergence faible, on a donc successivement :

$$(u, g') = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, g') = - \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n^\vee, g) = -(v, g)$$

quelle que soit la fonction  $g \in \mathcal{C}_0^1$ . On en déduit que la fonction  $u$  est faiblement dérivable (elle vérifie la formule (1.3) et sa dérivée faible est dans  $\mathbf{L}^2$ ) et  $u^\vee = v$ . Il reste à montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $u$  au sens de  $\mathbf{H}^1$ . Toujours en utilisant les inégalités (1.6), on a :

$$\|u_n - u\|_{\mathbf{H}^1}^2 = \|u_n - u\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|u_n^\vee - u^\vee\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \|u_n - u\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|u_n^\vee - v\|_{\mathbf{L}^2}^2$$

Chacun des deux termes de droite tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, il en est de même du membre de gauche, ce qui prouve le résultat. ■

## 1.3 Exercices

### Exercice 1.28 Convergence en mesure

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, m)$  un espace mesuré. On dit qu'une suite de fonctions mesurables  $(f_n)$  converge en mesure vers une fonction mesurable  $f$  si l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m(\{x \in \Omega, |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

On admettra que si une suite  $(f_n)$  converge en mesure alors la limite est unique (modulo la relation p.p.). On note  $(\mathbf{L}^1(\Omega), \|\cdot\|)$  l'espace vectoriel des fonctions intégrables muni de sa norme usuelle.

- 1.° On commence par un exemple : soit la suite de fonctions  $f_n = n1_{[0, 1/n[}$  sur  $\Omega = ]0, 1[$  avec la tribu des boréliens et la mesure de Lebesgue. Montrer que cette suite tend en mesure vers 0.
- 2.° Soit  $f \in \mathbf{L}^1(\Omega)$ . Montrer que l'on a :

$$\forall \delta > 0 \quad m(\{x \in \Omega, |f(x)| > \delta\}) \leq \frac{1}{\delta} \cdot \|f\| \quad (1.7)$$

- 3.° En déduire que la convergence en norme (dans  $\mathbf{L}^1(\Omega)$ ) implique la convergence en mesure.
- 4.° La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?

### Exercice 1.29 Opérateur à noyau

Soit  $m$  une mesure positive et  $k$  une application de deux variables définie sur les ensembles  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  :

$$\begin{aligned} \Omega_1 \times \Omega_2 &\longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ k : (x, y) &\longmapsto k(x, y) \end{aligned}$$

On suppose la propriété :

$$\int_{x \in \Omega_1} \left[ \int_{y \in \Omega_2} |k(x, y)|^2 dm \right] dm < +\infty$$

Soit enfin  $f \in \mathbf{L}^2(\Omega_2, m)$ .

1.° Montrer que l'intégrale

$$\int_{y \in \Omega_2} k(x, y) f(y) dm$$

est bien définie pp.

2.° On pose :

$$Kf(x) = \int_{y \in \Omega_2} k(x, y) f(y) dm$$

Montrer  $Kf \in \mathbf{L}^2(\Omega_1, m)$ .

3.° Montrer que l'opérateur  $K$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2(\Omega_2, m) &\longrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega_1, m) \\ K : f &\longmapsto Kf \end{aligned}$$

est linéaire et continu.

### Exercice 1.30 Dérivée faible non classique

- 1.° Donner un exemple d'une fonction faiblement dérivable mais pas fortement dérivable. Comme on peut montrer que pour les fonctions d'une variable réelle, les fonctions faiblement dérivables sont nécessairement continues, chercher un exemple parmi les fonctions continues.
- 2.° Donner un exemple d'une fonction de  $\mathbf{L}^2$  non faiblement dérivable

### Exercice 1.31 Dérivée faible d'une fonction primitive

Soit  $f \in \mathbf{L}^2$ . Pour  $x \in \Omega$ , on note  $F$  l'application  $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ .

- 1.° Vérifier d'abord que la fonction  $F$  est bien définie sur  $\Omega$  puis qu'elle est continue.
- 2.° Montrer ensuite que cette fonction  $F$  est faiblement dérivable et que l'on a :  $F^\vee = f$  (on pourra utiliser le théorème de Fubini). On a donc :

$$\boxed{\left( x \mapsto \int_0^x f(t) dt \right)^\vee = f} \quad (1.8)$$