

Modèles et exemples en stabilité des écoulements

G. Casalis, Onera

gregoire.casalis@onera.fr



élèves \neq étudiants

savoir, connaître \neq comprendre

comprendre : Du latin comprehendere,
formé de cum (« avec ») et prehendere (« saisir »).



Plan du cours

1. Concepts de stabilité

1. Exemple en mécanique du point
2. Définitions pour un écoulement
3. Exemple "artificiel"

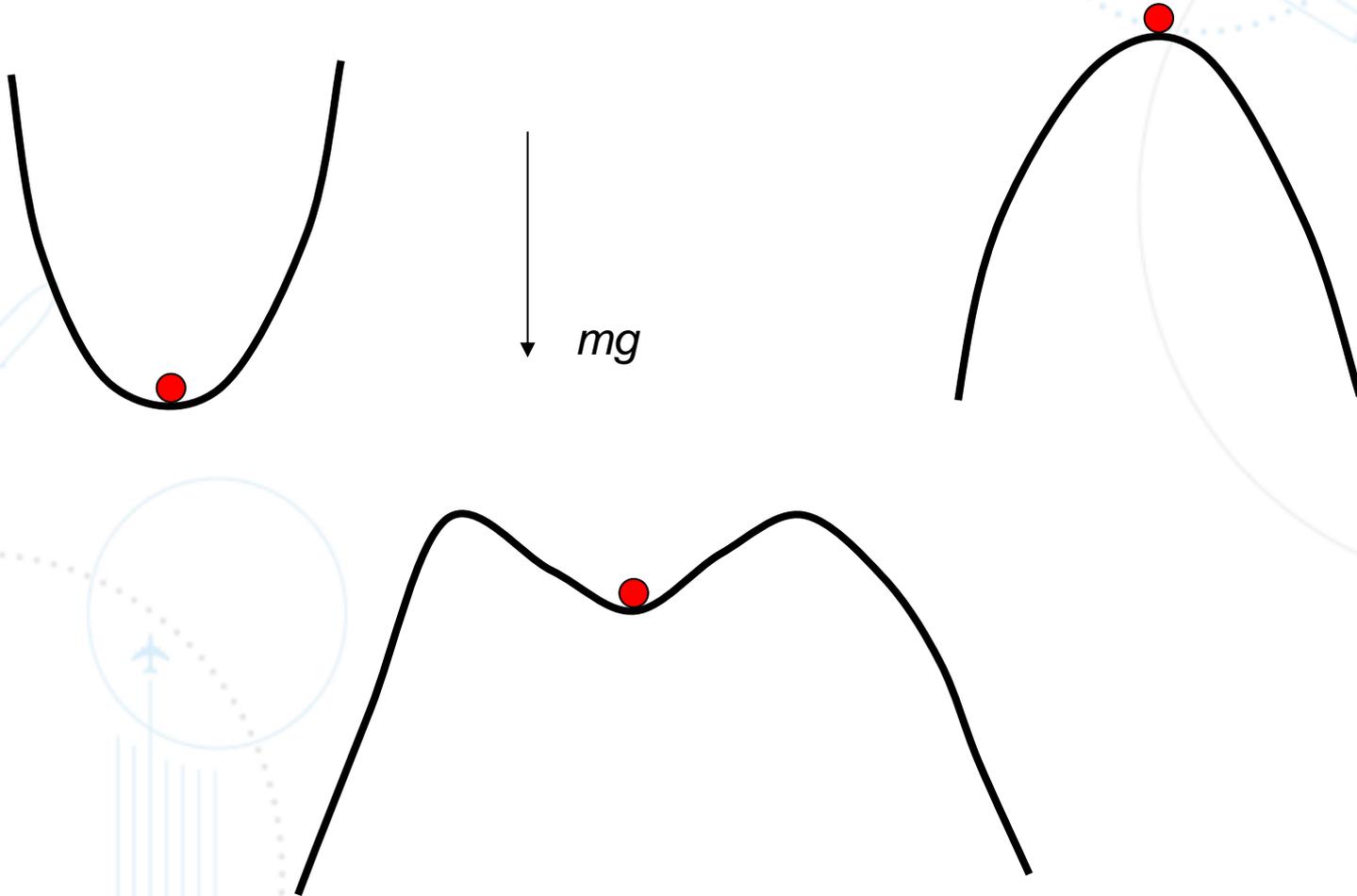
2. Exemples

1. Écoulement porteur constant compressible non visqueux
2. Instabilité de Kelvin-Helmholtz
3. Instabilité visqueuse (Orr-Sommerfeld)

3. Extensions

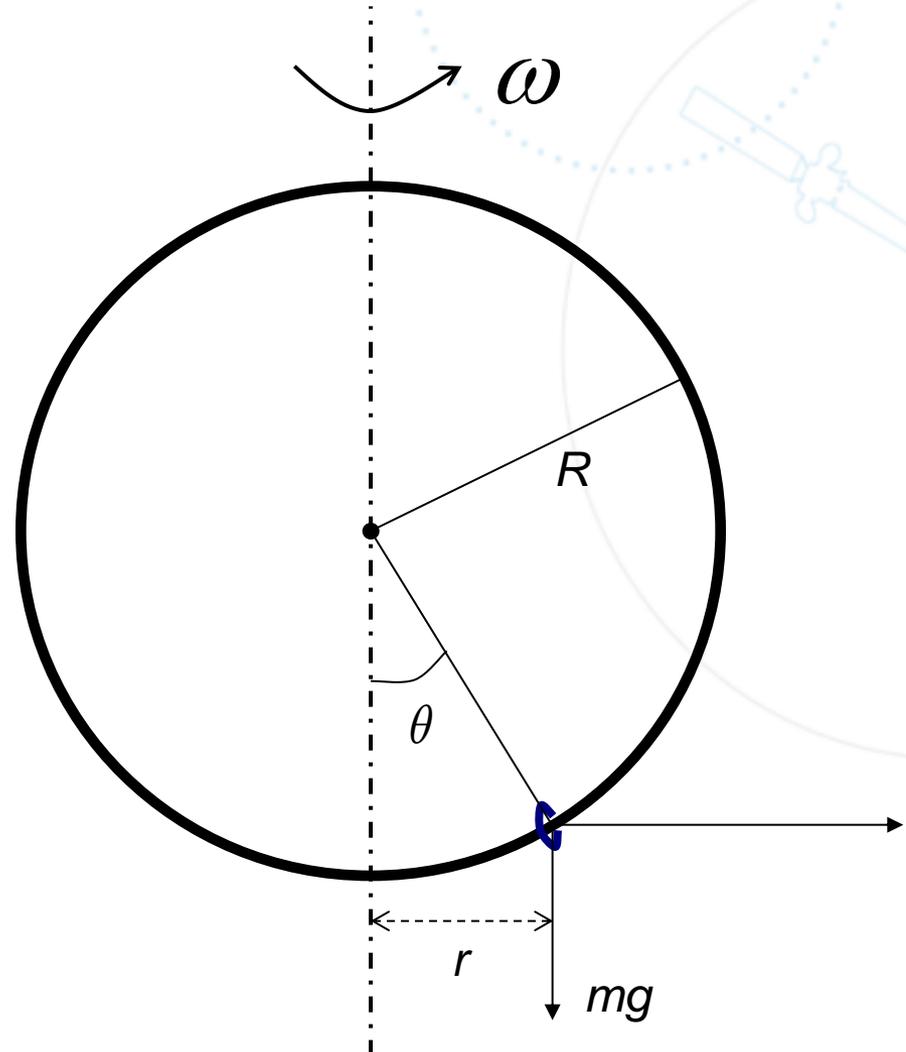
1. Approximation dans un problème aux valeurs propres
2. Méthode numérique : collocation spectrale + exemple

D'abord : stabilité de positions d'équilibre



Premier exemple simple : valeur seuil

Petit cercle bleu
de masse m
en glissement libre
sur un grand cercle
lui-même en rotation
autour d'un axe vertical





Modèle

Principe fondamental de la mécanique

$$m\underline{a} = \sum \text{forces}$$

Travail dans le référentiel entraîné



prise en compte des forces d'inertie

$$m\underline{a} = \text{poids} + \text{réaction} + \text{entraînement} + \text{Coriolis}$$

Résultats, analyse

PFD $\ddot{\theta} + \sin \theta (\omega_0^2 - \omega^2 \cos \theta) = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{g}{R}$

Positions d'équilibre : $\theta_e \in \left\{ 0, \pi, \cos^{-1} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \right\}$

si $\omega \geq \omega_0$

Stabilité ? $\theta = \theta_e + \varepsilon$

$\theta_e = 0$

$\ddot{\varepsilon} + (\omega_0^2 - \omega^2) \varepsilon = 0$

$\omega < \omega_0$ **Stab**

$\theta_e = \pi$

$\ddot{\varepsilon} - (\omega_0^2 + \omega^2) \varepsilon = 0$

$\omega \geq \omega_0$ **Inst.**

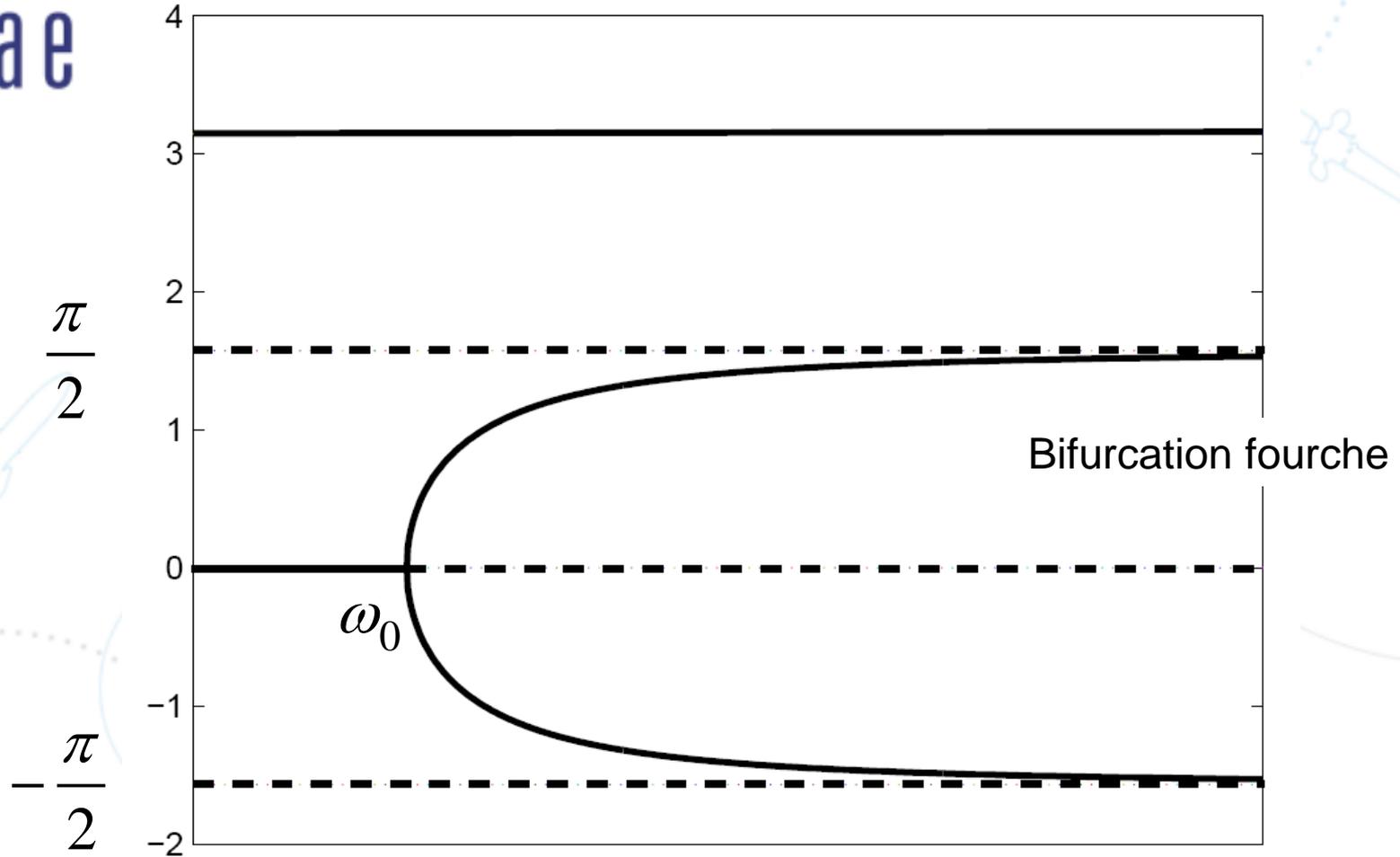
Inst.

$\theta_e = \cos^{-1} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)$

$\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{\omega^4 - \omega_0^4}{\omega^2} \right) \varepsilon = 0$

Stab

Illustration : diagramme de bifurcation



Instabilité comme perte de symétrie



Cas d'un écoulement

Solution idéale : écoulement de base

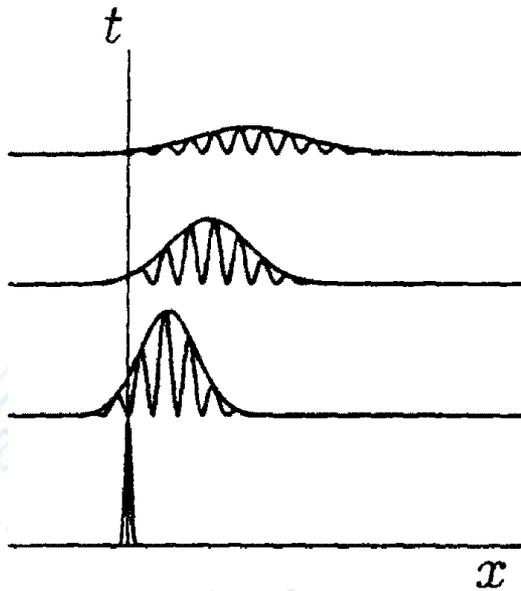
Stabilité selon Lyapounov :

- perturbation reste petite
- perturbation tend vers 0
- perturbation tend exponentiellement vers 0

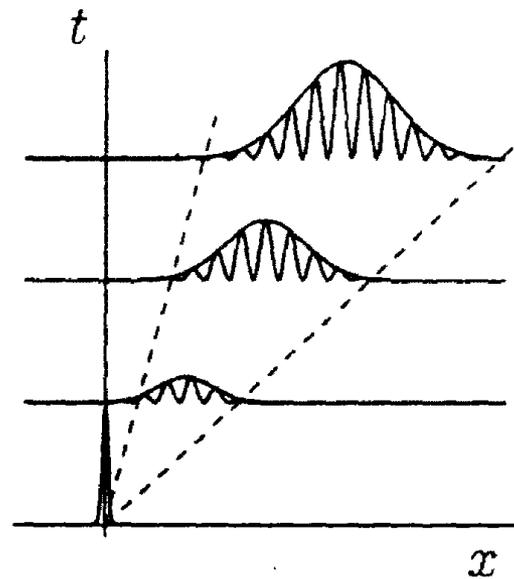
Technique générale : petites perturbations

Instab. convective / instab. absolue

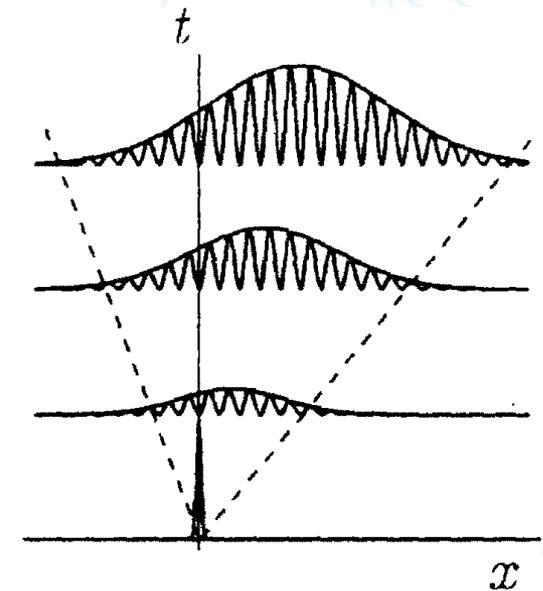
Huerre & Monkewitz, 1990



stable



Instable convectif



Instable absolu

amplificateur de bruit

résonateur

Exemple artificiel

Equation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Ecoulement de base

$$\bar{U} = cste$$

Forme en mode normal

$$u = \hat{u} \exp i(\alpha x - \omega t)$$

Relation de dispersion

$$F(\alpha, \omega) = 0$$

Bilan pour l'exemple artificiel

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Perturbation

$$u = \hat{u} \exp i(\alpha x - \omega t)$$

Problème linéarisé :

$$(-i\omega + \bar{U}i\alpha + \mu\alpha^2)\hat{u} = 0$$

$$\hat{u} = 0$$

Pas de perturbation

$$-i\omega + \bar{U}i\alpha + \mu\alpha^2 = 0$$

Théorie temporelle / théorie spatiale

$$u = \hat{u} \exp i(\alpha x - \omega t)$$

Théorie temporelle

α nombre réel $\omega = \omega_r + i\omega_i$ nombre complexe

$$u = \hat{u} \exp i(\alpha x - (\omega_r + i\omega_i)t) = \hat{u} \exp(\omega_i t) \exp i(\alpha x - \omega_r t)$$

amplification

terme d'onde

$\omega_i > 0$	→	perturbation s'amplifie en t	→	instabilité
$\omega_i < 0$	→	perturbation décroît en t	→	stabilité
$\omega_i = 0$	→	ni amplification ni amort.	→	neutre

Théorie temporelle / théorie spatiale

$$u = \hat{u} \exp i(\alpha x - \omega t)$$

Théorie spatiale

$\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ nombre complexe ω nombre réel

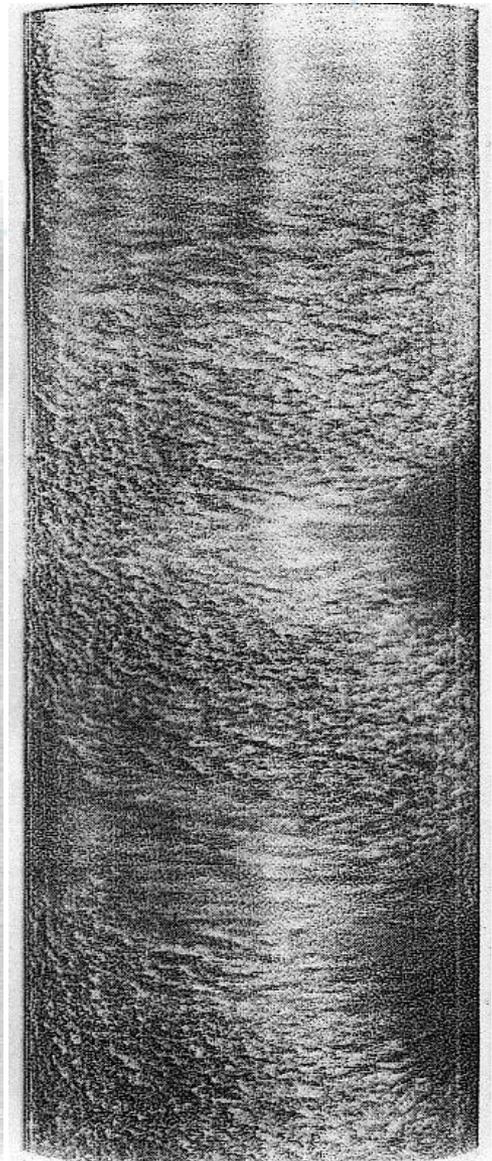
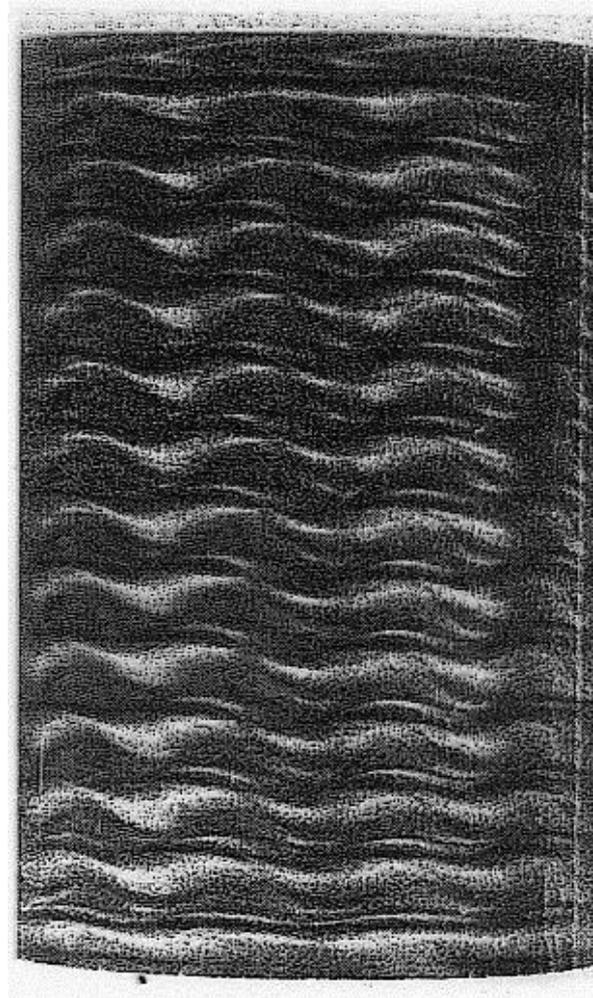
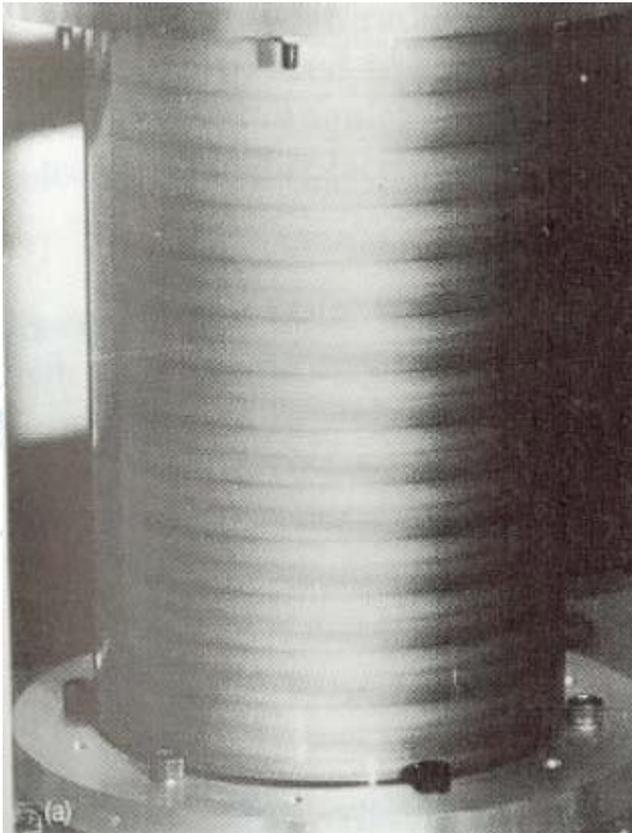
$$u = \hat{u} \exp i((\alpha_r + i\alpha_i)x - \omega t) = \hat{u} \exp(-\alpha_i x) \exp i(\alpha_r x - \omega t)$$

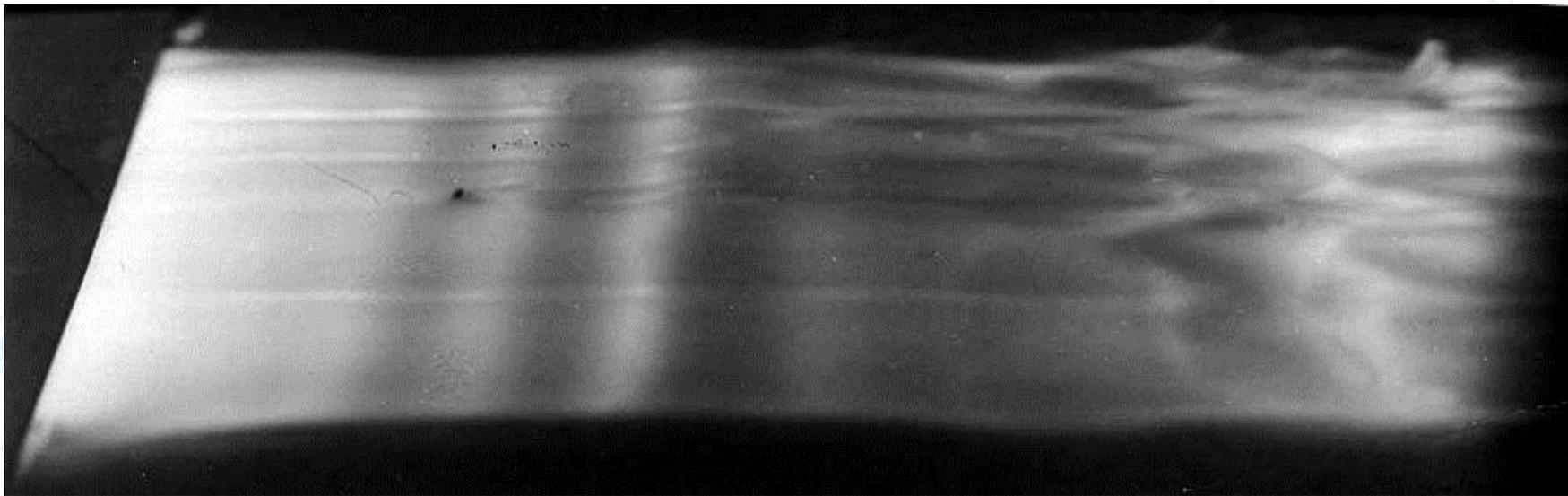
amplification

terme d'onde

$-\alpha_i > 0$	→	perturbation croît en x	→	instabilité
$-\alpha_i < 0$	→	perturbation décroît en x	→	stabilité
$\alpha_i = 0$	→	ni amplification ni amortis.	→	neutre

Illustrations





Définitions

$$u = \hat{u} \exp i(\alpha x - \omega t)$$

ω_i coef. ampl. temp

$-\alpha_i$ coef. ampl. spatiale

ω_r pulsation

$\alpha_r = k$ nombre d'onde

$$v_\phi = \frac{\omega_r}{\alpha_r}$$

vitesse de phase

$$v_g = \frac{\partial \omega_r}{\partial \alpha_r}$$

vitesse de groupe

$$f = \frac{\omega_r}{2\pi}$$

fréquence

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

longueur d'onde

Relation de dispersion $F(\alpha, \omega) = 0$

Formalisme

Formalisme (opérateurs)

Forme de mode normal

Directions d'inhomogénéité de l'écoulement porteur

Croissance transitoire



Plan du cours

1. Concepts de stabilité

1. Exemple en mécanique du point
2. Définitions pour un écoulement
3. Exemple "artificiel"

2. Exemples

1. Écoulement porteur constant compressible non visqueux
2. Instabilité de Kelvin-Helmholtz
3. Instabilité visqueuse (Orr-Sommerfeld)

3. Extensions

1. Approximation dans un problème aux valeurs propres
2. Méthode numérique : collocation spectrale + exemple

Ecoulement constant en non visqueux

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{U}) = 0$$

$$\rho \left[\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + (\underline{U} \cdot \nabla) \underline{U} \right] + \text{grad}(P) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\underline{U} \cdot \nabla) S = 0$$

gaz parfait

$$\frac{P}{\rho} = rT$$

gaz idéal

$$S = C_v \ln \frac{P}{\rho^\gamma}$$

Ecoulement de base : $\bar{U}, \bar{P}, \bar{T}, \bar{\rho}$: constantes

\bar{U} selon l'axe Ox

Pour simplifier : 2D

Solution intuitive

Problème linéarisé de dimension 4

Notation

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$DS = 0 \quad \text{Mode entropique}$$

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$D\Omega = 0 \quad \text{Mode de vorticité}$$

$$Dp = \bar{a}^2 D\rho$$

$$(D^2 - \bar{a}^2 \Delta)p = 0 \quad \text{Modes acoustiques}$$



Plan du cours

1. Concepts de stabilité

1. Exemple en mécanique du point
2. Définitions pour un écoulement
3. Exemple "artificiel"

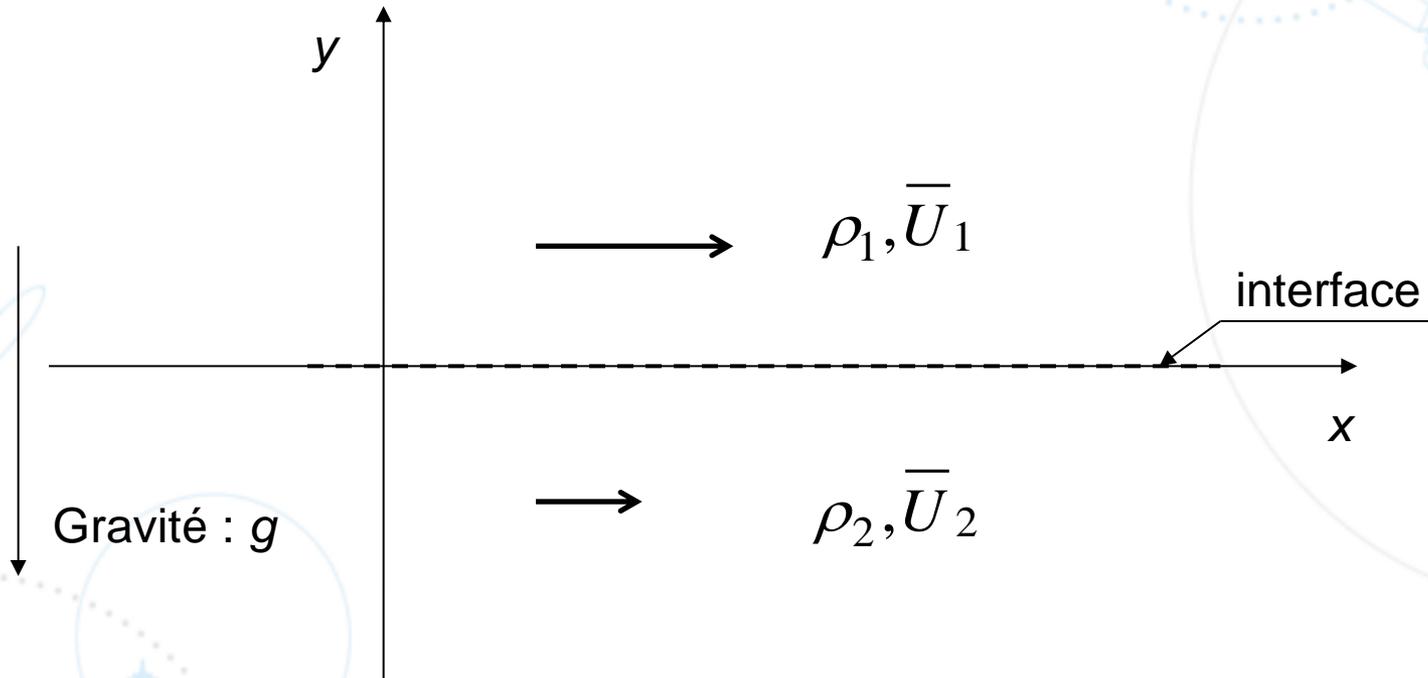
2. Exemples

1. Écoulement porteur constant compressible non visqueux
2. Instabilité de Kelvin-Helmholtz
3. Instabilité visqueuse (Orr-Sommerfeld)

3. Extensions

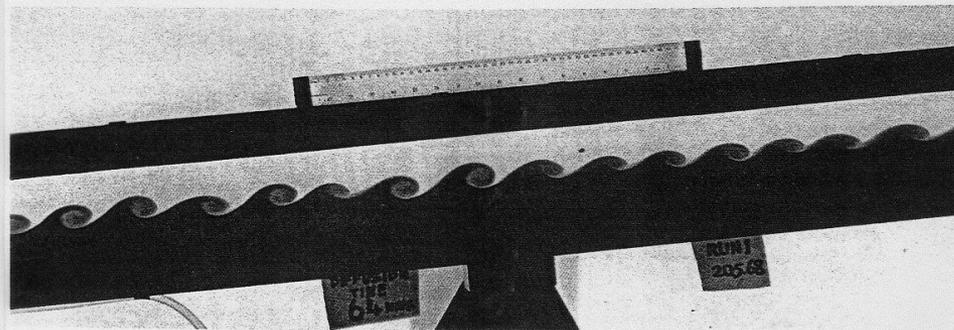
1. Approximation dans un problème aux valeurs propres
2. Méthode numérique : collocation spectrale + exemple

Instabilité de Kelvin-Helmholtz



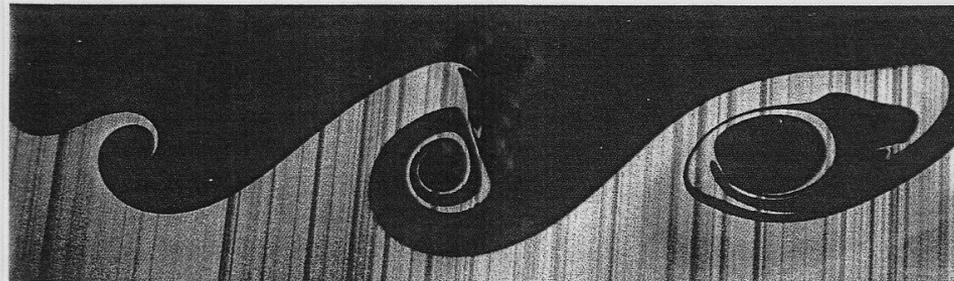
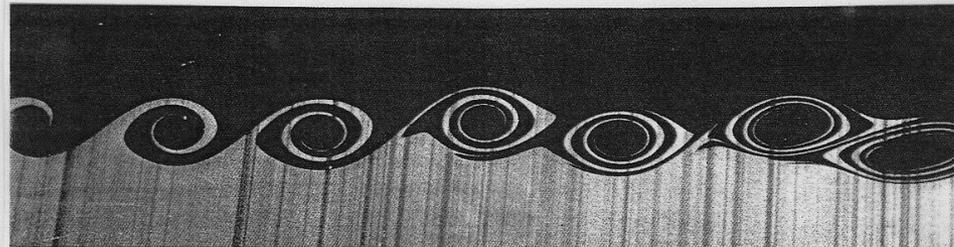
Changement de référentiel : $(\bar{U}_1, \bar{U}_2) \longrightarrow (+\bar{U}, -\bar{U})$

Illustration 1 (instabilité KH)



45. Kelvin-Helmholtz instability of stratified shear flow. A long rectangular tube, initially horizontal, is filled with water above colored brine. The fluids are allowed to diffuse for about an hour, and the tube then quickly tilted six degrees, setting the fluids into motion. The brine accel-

erates uniformly down the slope, while the water above similarly accelerates up the slope. Sinusoidal instability of the interface occurs after a few seconds, and has here grown nonlinearly into regular spiral rolls. *Thorpe 1971*



46. Kelvin-Helmholtz instability of superposed reams. The upper stream of water is moving to the right faster than the lower one, which contains dye that fluoresces under illumination by a vertical sheet of laser light. The faster stream is perturbed sinusoidally at the most

unstable frequency in the upper photograph, and at half that frequency in the lower one so that the motion locks into the subharmonic. *Photographs by F. A. Roberts, P. E. Dimotakis & A. Roshko*

Illustration 2 (instabilité KH)

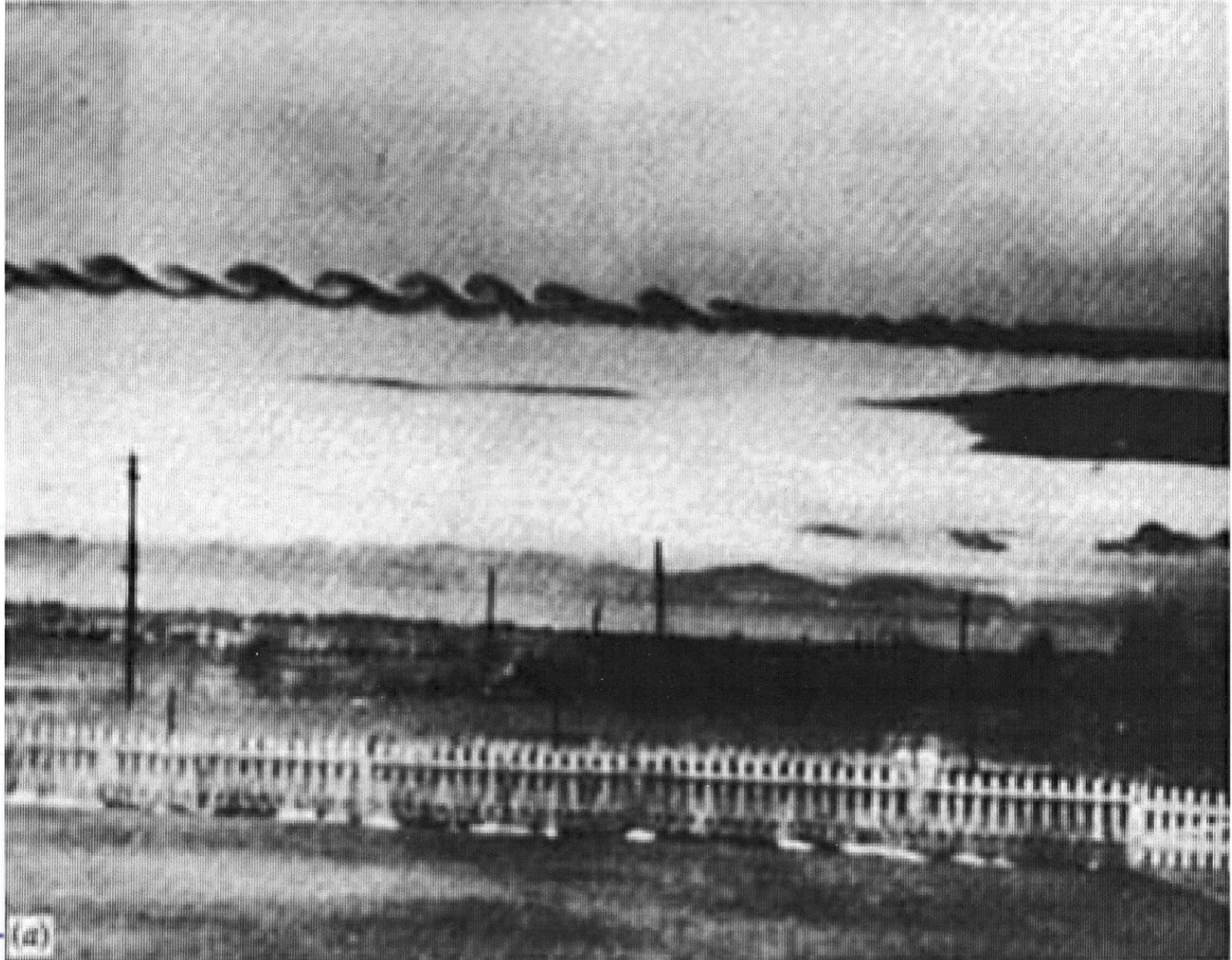


Illustration 3 (instabilité KH)





Illustration 4 (instabilité KH)



Illustration 5 (instabilité KH)



Illustration 6 (instabilité KH)



Météo78

Instabilité KH : modèle

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g$$

Interface : $F(x, y, t) = 0 = y - \eta(x, t)$

Relation cinématique à l'interface (continuité de la vitesse normale)

Equilibre en contrainte normale à l'interface

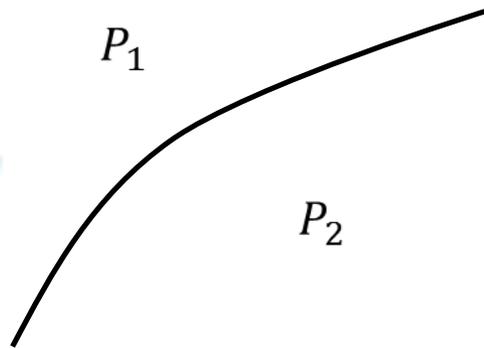
Instabilité KH : modèle (suite)

Interface : $F(x, y, t) = 0 = y - \eta(x, t)$

Vecteur normal unitaire $\underline{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) / \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2}$

Vitesse de déplacement normal $\underline{W} \cdot \underline{n} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2}}$

Instabilité KH : modèle (suite)



Longueur de capillarité

Interface eau-air

$$P_2 - P_1 = \frac{\gamma}{R}$$

(centre de courbure dans 2)

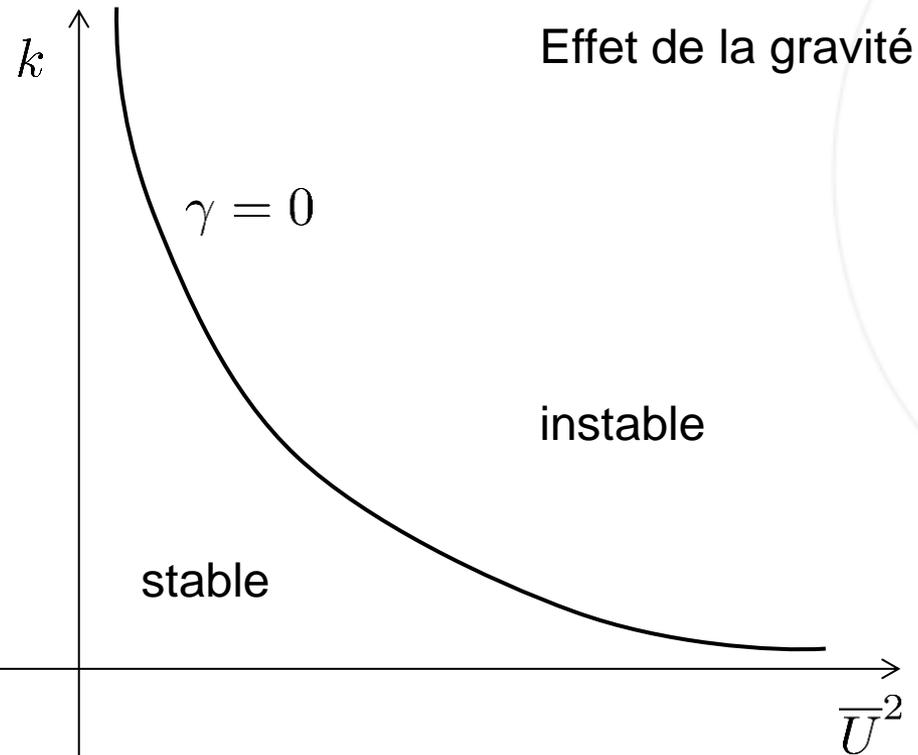
γ Coefficient de tension superficielle

Interface eau-air $\gamma = 0.07 \text{ N/m}$

$$l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{|\rho_1 - \rho_2|g}}$$

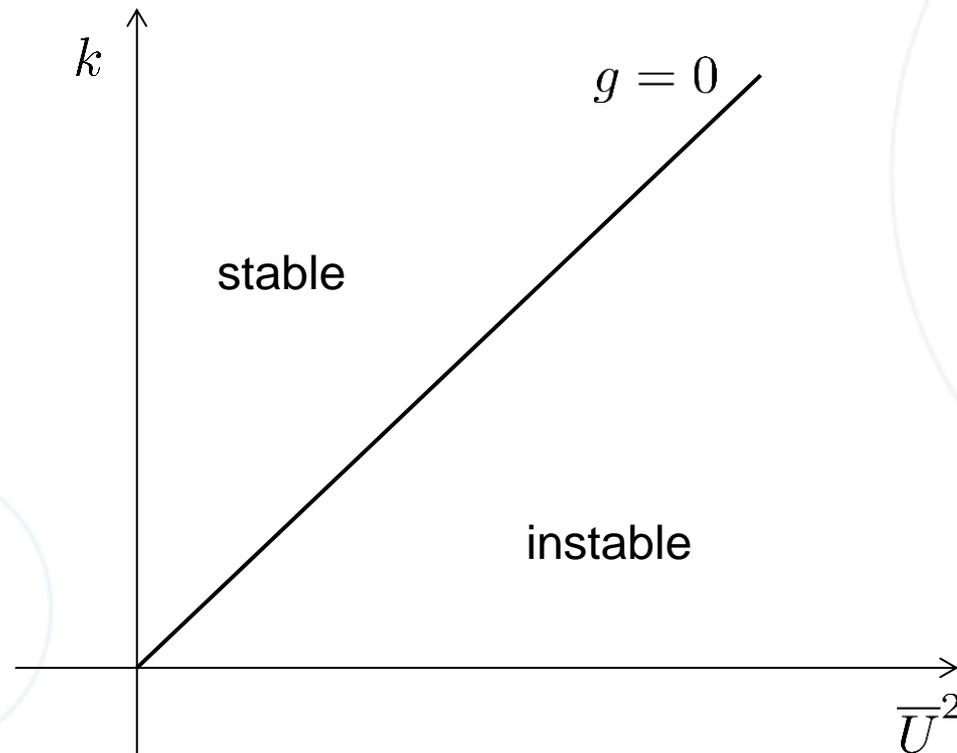
$$l_c = 2,7 \text{ mm}$$

Instabilité KH : Diagramme de stabilité

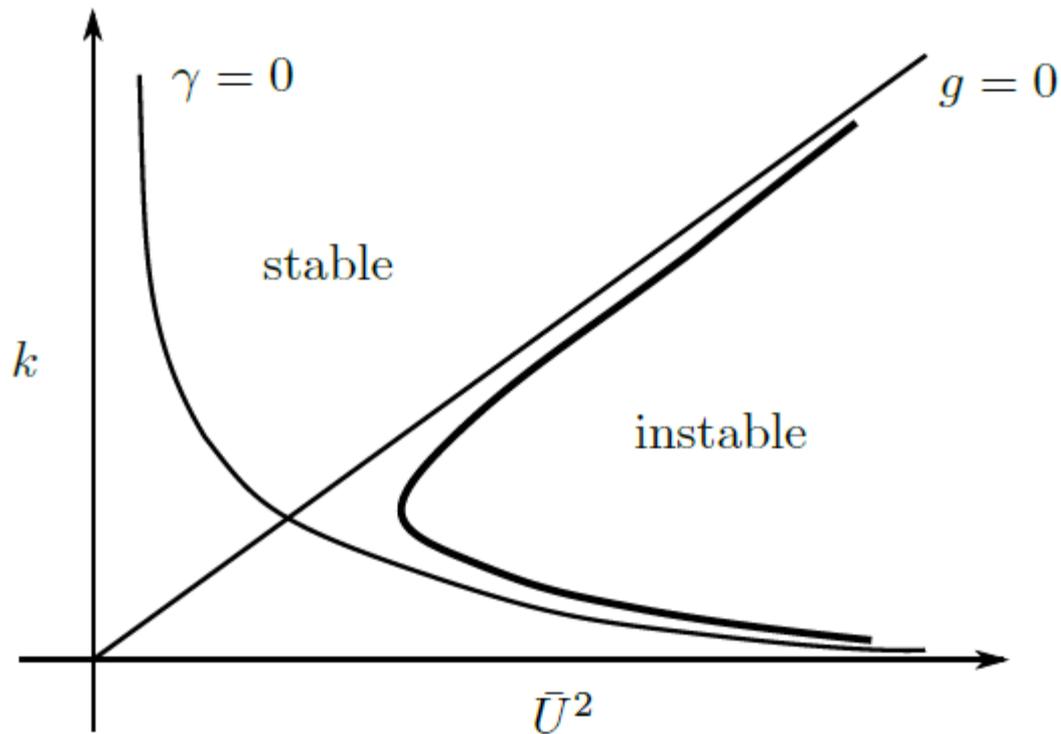


Instabilité KH : Diagramme de stabilité

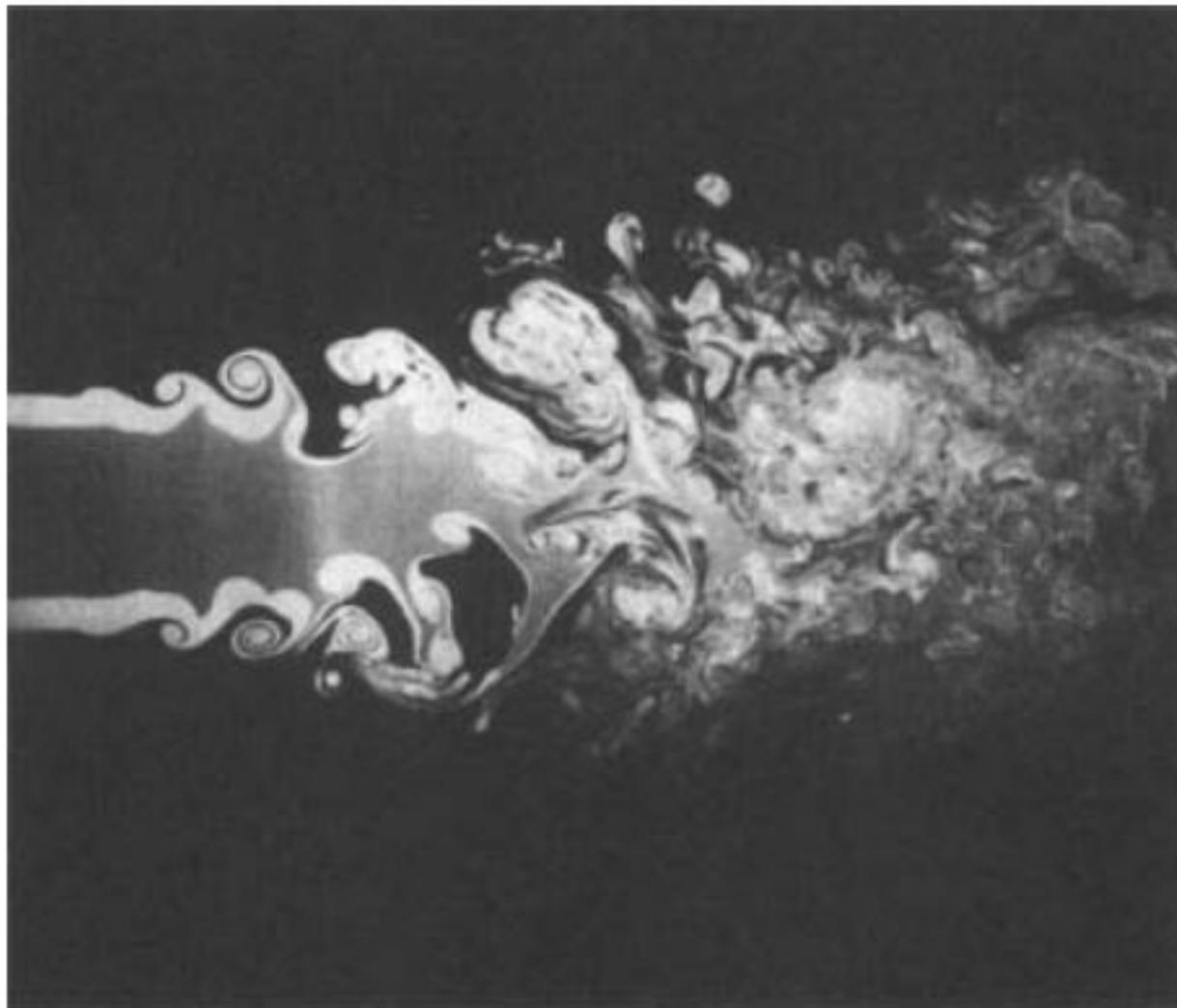
Effet de la tension superficielle



Instabilité KH : Diagramme de stabilité



Application : jet



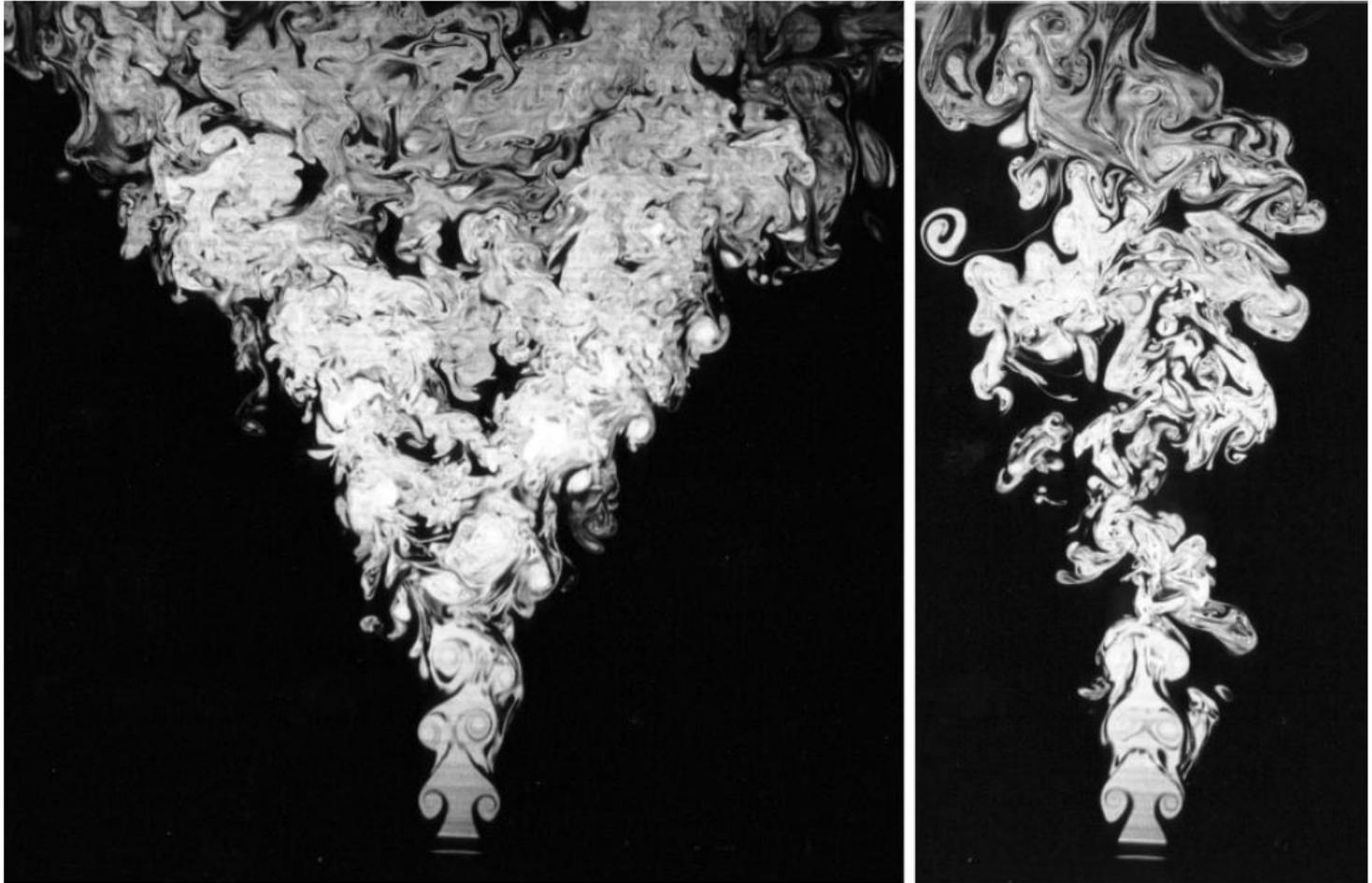


Figure 3 Bifurcating water jet at $Re = 4300$: (*left*) bifurcation plane; (*right*) bisecting plane. From Lee & Reynolds (1985a).

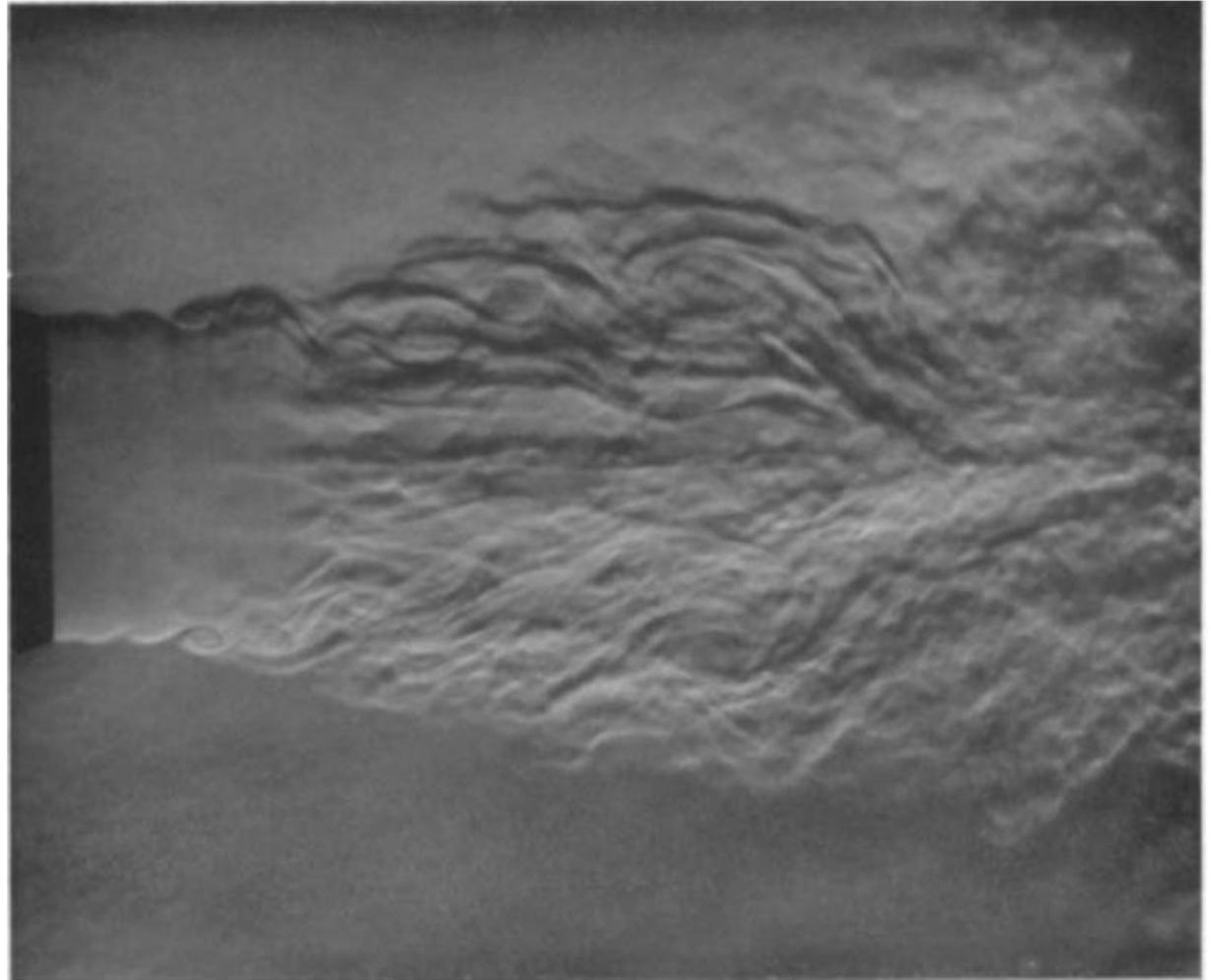


FIGURE 1 (b). Gas-injection schlieren pictures: 2-in. diameter jet $U_m \approx 40$ ft./sec.

Plan du cours

1. Concepts de stabilité

1. Exemple en mécanique du point
2. Définitions pour un écoulement
3. Exemple "artificiel"

2. Exemples

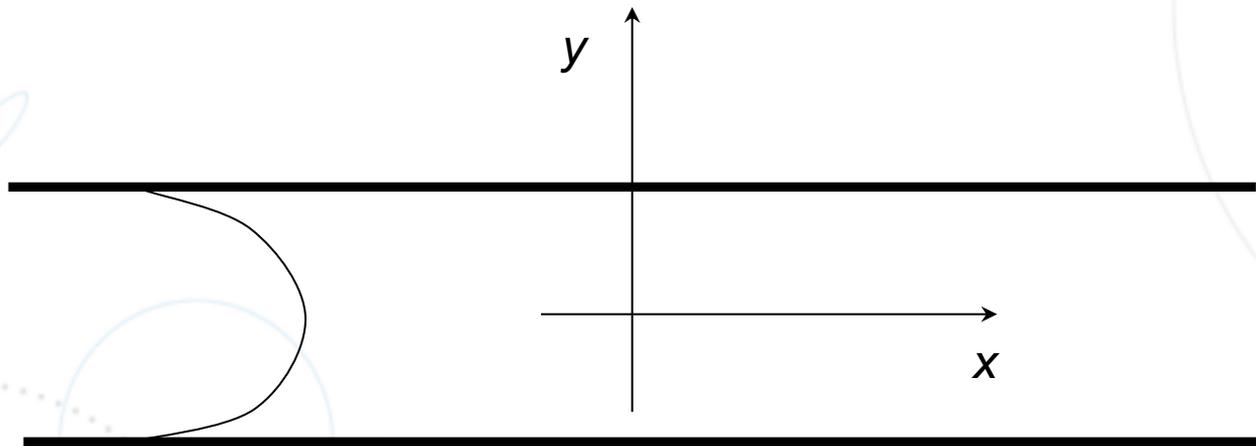
1. Écoulement porteur constant compressible non visqueux
2. Instabilité de Kelvin-Helmholtz
3. Instabilité visqueuse (Orr-Sommerfeld)

3. Extensions

1. Approximation dans un problème aux valeurs propres
2. Méthode numérique : collocation spectrale + exemple

Exemple de l'écoulement de Poiseuille plan

Écoulement visqueux 2D incompressible



Profil de vitesse parabolique (écoulement de base)

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

(grandeurs dimensionnelles)

$$\rho^* \left[\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right] + \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = \mu \Delta u^*$$

$$\rho^* \left[\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right] + \frac{\partial p^*}{\partial y^*} = \mu \Delta v^*$$

$2h$: distance entre les deux parois

U_m^* Max de vitesse moyenne (sur l'axe)

$$R_e = \frac{h \rho^* U_m^*}{\mu}$$

Equation d'Orr-Sommefeld

Perturbation :

$$q_f(x, y, t) = q(y) \exp i(\alpha x - \omega t)$$

Equations de Navier-Stokes linéarisées :

$$\left[\frac{1}{iR_e} (D^2 - \alpha^2)^2 - (\alpha \bar{U} - \omega)(D^2 - \alpha^2) + \alpha \bar{U}'' \right] v = 0 \quad D = \frac{d}{dy}$$

Equation d'Orr-Sommerfeld

Conditions aux limites $v(-1) = v'(-1) = v(1) = v'(1) = 0$

Calcul du spectre

$$\left[\frac{1}{iR_e} (D^2 - \alpha^2)^2 - (\alpha \bar{U} - \omega)(D^2 - \alpha^2) + \alpha \bar{U}'' \right] v = 0$$

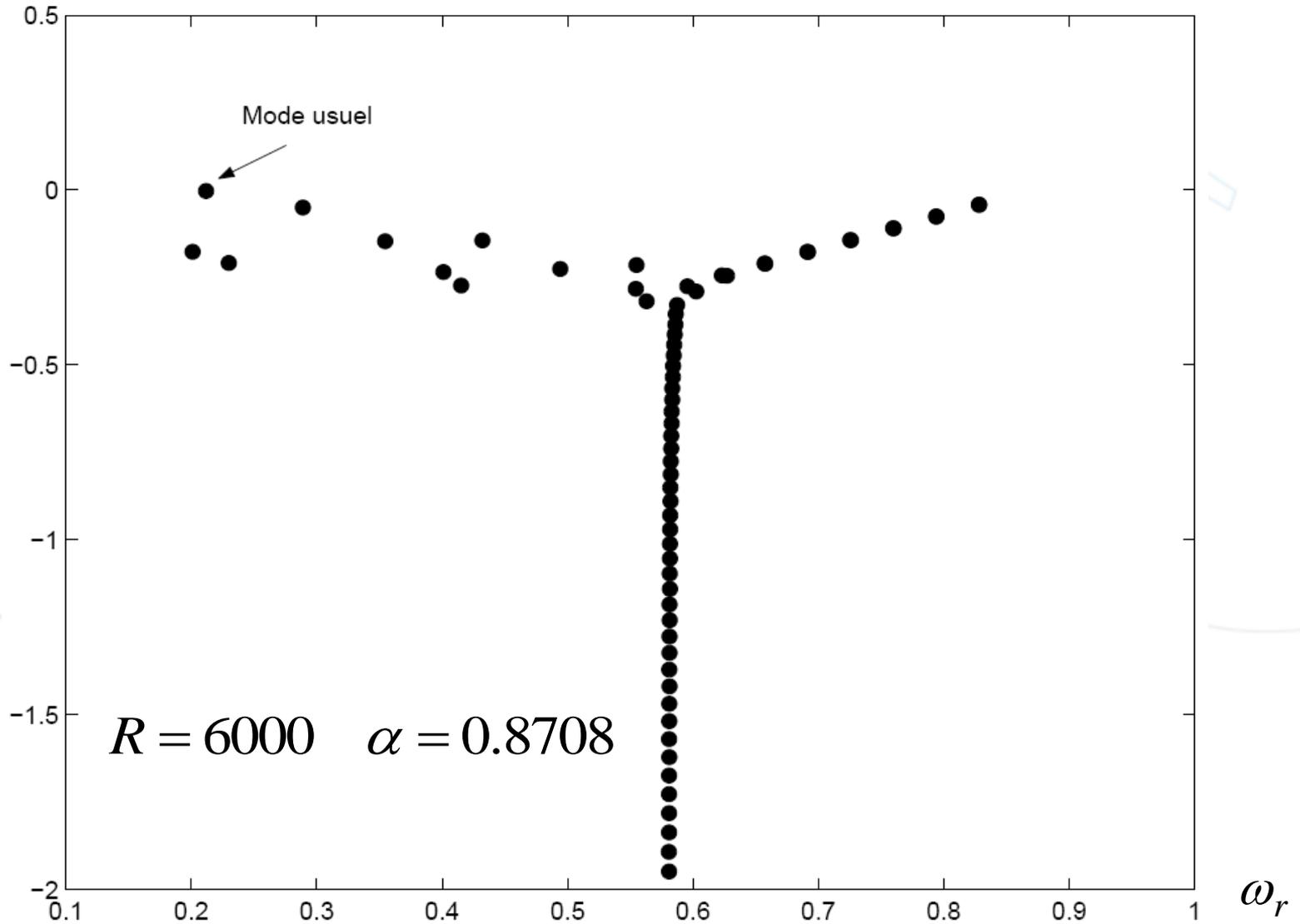
$$\left[\frac{1}{iR_e} (D^2 - \alpha^2)^2 - \alpha \bar{U} (D^2 - \alpha^2) + \alpha \bar{U}'' \right] v = -\omega (D^2 - \alpha^2) v$$

Discretisation

$$A.X = \omega B.X$$

Problème aux valeurs propres généralisé

Exemple de spectre



Méthode de tir

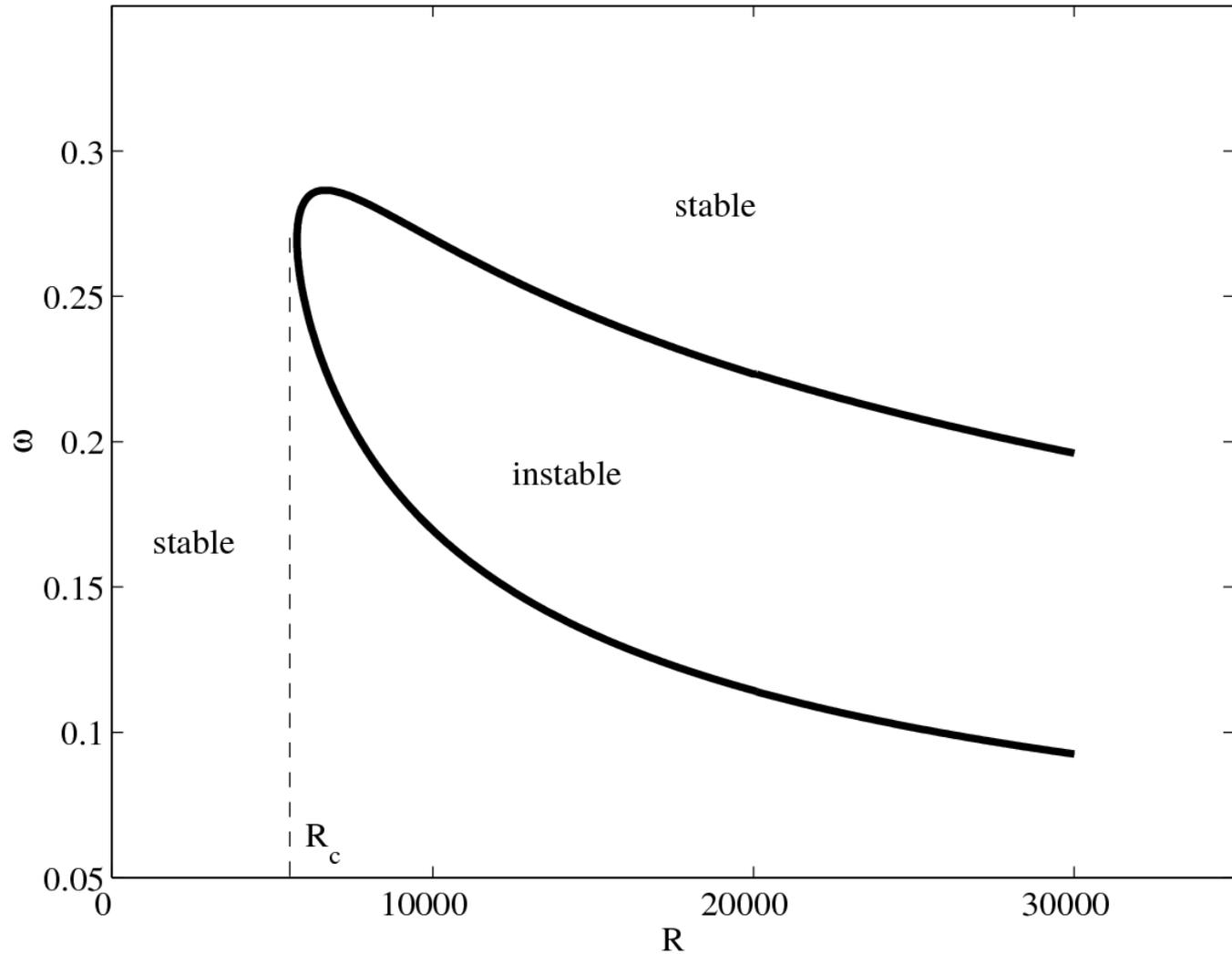
Calcul d'une valeur propre avec valeur initiale (convergence)

Déshomogénéisation

Résolution de $Ax = b$

Méthode itérative de Newton-Raphson
(utilisation du caractère holomorphe supposé)

Diagramme de stabilité





Résultats complémentaires

Modes obliques

Théorème de Squire

Théorème de Rayleigh

Relation de Gaster

Cas d'un écoulement 2,5D

Croissance transitoire, optimale

Approximation

Plan du cours

1. Concepts de stabilité

1. Exemple en mécanique du point
2. Définitions pour un écoulement
3. Exemple "artificiel"

2. Exemples

1. Écoulement porteur constant compressible non visqueux
2. Instabilité de Kelvin-Helmholtz
3. Instabilité visqueuse (Orr-Sommerfeld)

3. Extensions

1. Approximation dans un problème aux valeurs propres
2. Méthode numérique : collocation spectrale + exemple



Collocation spectrale

Points de collocation spectrale

$$\xi_i = \cos \frac{i\pi}{N} \quad \psi_i = \psi(\xi_i)$$

Fonction inconnue

$$\psi(\xi) = \sum_{i=0}^N \lambda_i(\xi) \psi(\xi_i)$$

Polynôme d'interpolation de Lagrange

$$\lambda_i(\xi) = \frac{1 - \xi^2}{\xi - \xi_i} (-1)^{i+1} \frac{T'_N(\xi)}{c_i N^2}$$

$$c_0 = c_N = 2 \quad c_1 = c_2 = \dots = c_{N-1} = 1$$

$$i \neq k \quad D_{ik} = \frac{c_i}{c_k} \frac{(-1)^{k+i}}{\xi_i - \xi_k}$$

$$D_{00} = -D_{NN} = \frac{2N^2 + 1}{6}$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1 \quad D_{ii} = \frac{-\xi_i}{2(1 - \xi_i^2)}$$

$$\frac{d\psi}{d\xi}(\xi_i) = \sum_{k=0}^N D_{ik} \psi(\xi_k)$$



Programme Matlab

données.m : ensemble des directives du calcul

Initialisation.m : initialisations diverses

newton.m : calcul d'une valeur propre par méthode de tir

spectre.m : calcul du spectre

balai.m : possibilité de balayage paramétrique (via newton)

desfp.m : dessin de la fonction propre
