C. R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Série II *b*, p. 189-194, 1997
Mécanique des fluides/*Fluid mechanics*

Comparaison d'un calcul de couche limite à forte interaction et d'une solution Navier–Stokes sur une aspérité en régime laminaire stationnaire

Cyrille ROGET*, Jean-Philippe BRAZIER et Grégoire CASALIS

* Institut de Mécanique des Fluides, UMR-CNRS, Université Paul–Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex ;

Département d'Études et de Recherches en Aérothermodynamique, ONERA-CERT, 2, avenue Édouard–Belin, 31055 Toulouse cedex 4, France.

Résumé. On considère un écoulement plan stationnaire de fluide incompressible. On étudie la réponse d'une couche limite bidimensionnelle laminaire à une perturbation située sur la paroi d'une plaque plane. Les résultats d'un calcul de couche limite à forte interaction sont comparés à ceux d'un code résolvant les équations complètes de Navier–Stokes. L'interaction forte est obtenue par le calcul simultané du fluide parfait linéarisé et de la couche limite, selon la méthode de Veldman. L'analyse des résultats permet de mettre en évidence certains aspects de la structure asymptotique en triple couche.

Mots clés : couche limite / asymptotique / Navier–Stokes

Comparison of interactive boundary layer and Navier–Stokes solutions for a steady laminar flow past a hump

Abstract. *We consider a steady, laminar, two-dimensional flow of an incompressible fluid. The response of the boundary layer encountering a two-dimensional hump on a flat plate is studied. Using Veldman's simultaneous method to calculate interacting boundary layers, the asymptotic structure of the triple deck model can be taken into account. The results are compared with full Navier–Stokes solutions, and some aspects of the asymptotic triple-deck theory can be brought into evidence.*

Keywords: *boundary layer / asymptotic / Navier–Stokes*

Note présentée par Sébastien CANDEL.

1251-8069/97/03250189 © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Abridged English Version

Boundary layer problems with strong interaction can be handled by solving simultaneously the linearized inviscid flow equations together with the boundary-layer local equations. This method was first introduced by Veldman for two-dimensional flows (Veldman, 1979). It has been extended to steady three-dimensional flows (Roget, 1996, 1997). It relies on the properties of the three-dimensional triple deck model (Bogolepov *et al.*, 1985), for example, the strong coupling between the inviscid pressure and the boundary layer displacement thickness.

The system is reduced to four equations with four unknowns, which are the wall values of the inviscid velocity streamwise and crosswise components, and the streamwise and crosswise integral boundary-layer thicknesses. The elliptic nature of the system is taken into account by several sweeps over all the plane domain. The algorithm was tested on various two- and three-dimensional obstacles placed on a flat plate.

A comparison for a two-dimensional case is presented here. The results of the simultaneous method are compared with those of *PEGASE*, developed at ONERA's OAt2 Theoretical Aerodynamics Department. *PEGASE* is an unsteady Navier–Stokes solver, aimed at direct numerical simulations, but only steady results will be presented here.

We consider a two-dimensional flow of an incompressible fluid on a flat plate, encountering a rectangular step (*fig. 1*). The step is 45 cm long and 8 mm high (2% of the boundary-layer height). It is placed at $L = 19.15$ m from the plate's leading edge. The flow viscosity is such that $1/\nu = 5\,000$ s/m^2. With an external velocity of 1 m/s, the Reynolds number based on L is thus: $Re = 95\,750$.

The longitudinal and normal components of the velocity are plotted in *figure 2,* at the $x = 19.285$ m abscissa, together with the skin friction distribution. A very close agreement is found on the longitudinal velocity, and the perturbation is limited to a thin region close to the wall. On the normal velocity profiles, the viscous sub-layer predicted by the triple-deck theory clearly appears. The skin friction coefficients are very close, except near the hump's edges, where singularities are encountered in the boundary-layer coupling owing to the sharp corners.

The physical thicknesses can be compared with the results of the asymptotic theory. The oncoming Blasius' boundary layer is 40 cm thick when encountering the step. The viscous layer's thickness can be estimated as 5.8 cm from the steepness change on the normal velocity profile. The ratio is thus:

$$\frac{\delta_{\text{boundary layer}}}{\delta_{\text{sub-layer}}} = \frac{0.4}{5.8\,10^{-2}} = 6.89$$

According to the asymptotic theory (Roget, 1996), the orders of magnitude for this kind of hump are:

$$\delta_{\text{main deck}} \sim Re^{-1/2} \qquad \delta_{\text{lower deck}} \sim Re^{-2/3}$$

giving a ratio:

$$\frac{\delta_{\text{main deck}}}{\delta_{\text{lower deck}}} = Re^{1/6} = 6.78$$

Therefore, the numerical solution agrees very well with the asymptotic orders of magnitude.

The close agreement obtained between the simultaneous method, the Navier–Stokes solution, and the asymptotic theory constitutes on the one hand a validation for the interacting boundary layer and on the other hand a proof of the excellent precision given by the Navier–Stokes solver. The simultaneous method is fast enough to allow three-dimensional calculations, and could be extended to more complex obstacles than a small hump on a flat plate.

1. Description du problème

Les problèmes de couche limite avec couplage fort peuvent être traités en résolvant simultanément les équations linéarisées du fluide parfait et les équations locales de couche limite. Ce procédé, introduit par Veldman pour les écoulements bidimensionnels décollés (Veldman, 1979), a été étendu aux écoulements tridimensionnels stationnaires (Roget, 1996 ; Roget *et al.*,1997). Cela permet de respecter la structure asymptotique propre du modèle en triple couche tridimensionnel (Bogolepov et Lipatov, 1985), c'est-à-dire le couplage fort entre la pression pariétale du fluide parfait et l'épaisseur de déplacement de la couche limite.

A partir des équations locales de couche limite tridimensionnelles et des équations d'Euler linéarisées à la paroi, on se ramène à la résolution d'un système de quatre équations à quatre inconnues, qui sont les vitesses longitudinale et transversale pour le fluide parfait à la paroi et les deux épaisseurs intégrales longitudinale et transversale de la couche limite. On en déduit ensuite les profils de vitesse dans la couche limite. Le caractère elliptique du système global est pris en compte par un balayage répété en x et en z.

En vue de valider cette méthode, on en a comparé les résultats à ceux obtenus par d'autres méthodes sur plusieurs types d'aspérités bi- ou tridimensionnelles placées sur une plaque plane. Dans cet article, on présente une comparaison avec une solution « exacte » des équations de Navier–Stokes dans un cas bidimensionnel. On considère l'écoulement plan stationnaire d'un fluide incompressible newtonien, sur une plaque plane sans incidence, pourvue d'une aspérité. Les résultats de la méthode simultanée sont comparés à ceux obtenus avec le code *PÉGASE* développé à la division OAt2 de l'ONERA (Lé *et al.*, 1996). Ce code est conçu pour résoudre les équations de Navier–Stokes instationnaires, mais seuls des résultats stationnaires seront présentés ici. Les calculs avec *PÉGASE* ont été effectués dans le cadre d'études de réceptivité de la couche limite (Casalis et Copie, 1996).

La géométrie du problème est représentée sur la *figure 1*. Il s'agit d'une indentation rectangulaire de 45 cm de long et 8 mm de haut, soit environ un cinquantième de l'épaisseur de couche limite, située à une distance $L = 19{,}15$ m du bord d'attaque de la plaque plane. La viscosité du fluide est telle que $1/\nu = 5\,000$ s/m^2. La vitesse extérieure valant 1 m/s, on obtient pour le nombre de Reynolds basé sur L la valeur : $Re = 95\,750$. L'objectif est donc de calculer en détail l'écoulement au voisinage de cette microrugosité, en notant éventuellement la présence d'un décollement en amont ou en aval de celle-ci. On comparera aussi les résultats avec les prévisions de la théorie asymptotique.

2. Comparaison des résultats

La *figure 2* montre les profils de vitesse longitudinale u et normale à la paroi v sur la rugosité, à l'abscisse $x = 19{,}285$ m, ainsi que l'évolution du coefficient de frottement sur l'ensemble du domaine de calcul. Les profils de vitesse longitudinale sont tracés sur environ un huitième de la

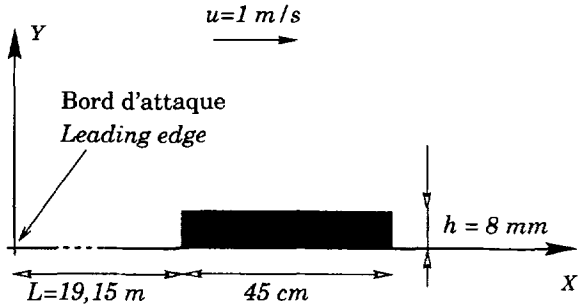

Fig. 1. – Géométrie de l'obstacle.

Fig. 1. – Geometry of the hump.

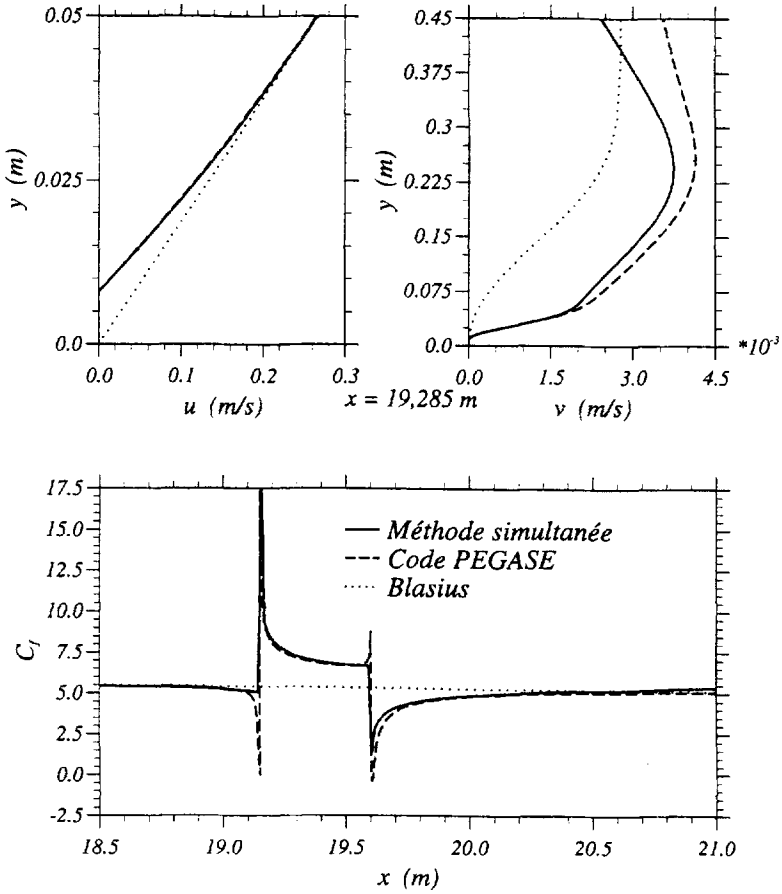

Fig. 2. – Profils de vitesse et coefficient de frottement.

Fig. 2. – Velocity profiles and skin friction coefficient.

hauteur de couche limite. On constate que les deux méthodes donnent des profils identiques, qui se raccordent tous deux à la partie linéaire du profil de Blasius. La perturbation de vitesse longitudinale due à la rugosité ne concerne donc qu'une sous-couche au voisinage immédiat de la paroi, tandis que la solution de Blasius reste valable en première approximation dans la partie supérieure de la couche limite, conformément à ce que prévoit la théorie asymptotique de la triple couche (Roget, 1996).

Le deuxième tracé représente l'évolution de la vitesse normale à la paroi en fonction de y sur la totalité du domaine de calcul de couche limite. Il met clairement en évidence la présence de la sous-couche visqueuse, conformément à la structure en triple couche (Roget, 1996). Là encore, les résultats numériques confirment l'analyse asymptotique, qui prévoit que pour la vitesse normale, la perturbation due à l'aspérité est prépondérante par rapport à la vitesse normale de la solution de Blasius. Les deux méthodes donnent le même résultat jusqu'au point de changement de pente, mais au-delà de ce point les différences s'accentuent. On peut toutefois remarquer que l'échelle du tracé est très faible (10^{-3}) et que les différences sont donc minimes en valeur absolue, bien plus faibles en tout cas que l'écart vis-à-vis de la solution de Blasius. Elles peuvent aussi s'expliquer par le fait que la méthode simultanée est une méthode de couche limite, qui ne représente donc pas l'évolution du fluide parfait au-dessus de la paroi.

Le dernier graphique représente la comparaison des coefficients de frottement en fonction de l'abscisse, sur l'ensemble du domaine de calcul. On observe à nouveau quelques différences : ainsi la méthode simultanée ne prévoit pas de pic en amont du bord droit de la bosse, ni de décollement en aval, contrairement au résultat de *PÉGASE*. En revanche, sur le reste du domaine, les deux résultats sont en très bon accord. Les différences au niveau des discontinuités s'expliquent par la présence de points singuliers dans le calcul d'intégrales de Cauchy intervenant dans le couplage. Cette remarque impose de regarder les résultats de la méthode simultanée près des points anguleux avec réserve. Mais lorsque l'on s'éloigne de ces points, la méthode prouve sa très bonne capacité à reproduire la perturbation du coefficient de frottement, même sur une rugosité aussi faible.

A partir des résultats obtenus, on peut aussi comparer les épaisseurs physiques aux dimensions asymptotiques données par l'analyse des structures en triple couche (Roget, 1996). La couche limite de Blasius qui se développe depuis le bord d'attaque de la plaque a une épaisseur de 0,4 m au niveau de l'indentation. Le profil de vitesse normale permet de mesurer la hauteur de sous-couche visqueuse, au point de changement de pente, soit 5,8 cm. On obtient alors un rapport:

$$\frac{\delta_{\text{couche limite}}}{\delta_{\text{sous-couche visqueuse}}} = \frac{0{,}4}{5{,}8 \,.\, 10^{-2}} = 6{,}89$$

La théorie asymptotique basée sur le nombre de Reynolds prévoit pour des bosses de cette catégorie les ordres de grandeur suivants (Roget, 1996):

$$\delta_{\text{couche limite}} \sim Re^{-1/2} \qquad \delta_{\text{sous-couche visqueuse}} \sim Re^{-2/3}$$

soit un rapport:

$$\frac{\delta_{\text{couche limite}}}{\delta_{\text{sous-couche visqueuse}}} = Re^{1/6} = 6{,}78$$

Les épaisseurs des différentes couches correspondent donc bien aux ordres de grandeur prévus par la théorie asymptotique.

3. Conclusion

En dehors des points anguleux, la méthode simultanée donne des résultats en très bon accord avec les résultats du code *PÉGASE* sur un cas *a priori* difficile : très faible hauteur de la rugosité, nombre de Reynolds élevé (10^5) et présence de points anguleux. Ces résultats sont aussi en très bon accord avec la théorie asymptotique. Ces remarques permettent à la fois de valider la méthode simultanée développée au DERAT, et de confirmer l'excellente précision du code *PÉGASE*. De plus, les résultats de la méthode simultanée sont obtenus avec un temps de calcul bien plus faible que ceux du code *PÉGASE*, qui n'a toutefois pas été conçu pour ce type de travail. Ainsi validée, la méthode simultanée permettra d'étudier des perturbations tridimensionnelles, pour lesquelles les temps de calcul et les maillages nécessaires ne permettront plus l'utilisation d'un code Navier–Stokes. Elle pourrait également être étendue à des configurations plus complexes qu'une aspérité sur une plaque plane.

Note remise le 7 avril 1997, acceptée après révision le 26 mai 1997.

Références bibliographiques

Bogolepov V. V., Lipatov I. I., 1985. Locally three-dimensional laminar flow, *Journal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki*, 1, 28-36.

Casalis G., Copie M.-L., 1996. *Développement et validation d'un code d'équations de stabilité parabolisées en non linéaire tridimensionnel. Étude de la réceptivité localisée (micro-rugosité de paroi)*, rapport technique DERAT n° 105/5118.10, ONERA CERT.

Lé T., Troff B., Sagaut B., Dang Tran K., Phuoc Loc T., 1997. *PÉGASE*: a Navier–Stokes solver for direct numerical simulation for incompressible flows, *Int. J. Num. Meth. in Fluids* (accepté pour publication).

Roget C., 1996. *Structures asymptotiques et calculs d'écoulements sur des obstacles bi- et tridimensionnels*, Thèse de doctorat, Université Paul-Sabatier, Toulouse.

Roget C., Brazier J.-P., Cousteix J., Mauss J., 1997. A simultaneous method to compute steady three-dimensional interacting boundary layers, *Eur. J. Mech.* (soumis).

Veldman A. E. P., 1979. *A numerical method for the calculation of laminar, incompressible boundary layers with strong viscous–inviscid interaction*, rapport technique 79023 U, NLR, Pays-Bas.