

## Méthodes et modèles mathématiques

Test - Durée 2h00 - 25 novembre 2010

*Tous les documents sont autorisés.*

### Premier problème

On considère le problème différentiel défini pour  $t \in \mathbb{R}^+$  :

$$\begin{cases} y'' + y - \varepsilon y^3 = 0 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- 1.° Mettre en œuvre la méthode des échelles multiples en posant comme dans le cours :

$$y(t) = Y_0(t, \tau) + \varepsilon Y_1(t, \tau) + o(\varepsilon) \quad \text{avec} \quad \tau = \varepsilon t$$

Écrire les équations pour  $Y_0$  et  $Y_1$ .

- 2.° Déterminer  $Y_0$  en notant  $A(\tau)$  la “constante” d’intégration (qui est en fait fonction de  $\tau$ ).
- 3.° Calculer la solution générale pour cette fonction  $A(\tau)$ .
- 4.° En utilisant les conditions initiales, montrer que l’on a finalement :  $Y_0(t, \tau) = \cos(t - 3\tau/8)$ .
- 5.° Écrire l’équation différentielle pour  $Y_1$  ainsi que les conditions initiales que cette fonction doit satisfaire.
- 6.° Quelle est la forme générale de  $Y_1$  ? Comment mène-t-on le calcul (ne pas l’effectuer) ?

## Second problème

On considère le problème différentiel :

$$\begin{cases} \varepsilon^2 y'' + x^2 y' - (x^2 + \varepsilon^{1/2})y = 0 \\ y(0) = 1 \quad y(1) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

où  $\varepsilon$  est un petit paramètre par rapport à 1 :  $\varepsilon \ll 1$ .

- 1.° Montrer qu'il s'agit là d'un problème de perturbation singulière. On admet qu'il existe une couche limite en  $x = 0$ .
- 2.° Calculer complètement l'ordre dominant de la solution extérieure. On montrera que la solution à l'ordre dominant s'écrit :  $y_0(x) = \exp(x - 1)$ .
- 3.° Chercher les solutions possibles pour une variable interne (en posant  $x = X\varepsilon^p$ , on trouvera  $p = 1/2$  et  $p = 3/4$ ). Montrer qu'il y a deux couches limites superposées que l'on appellera (en justifiant) couche interne et couche du milieu. Commenter la figure 1.

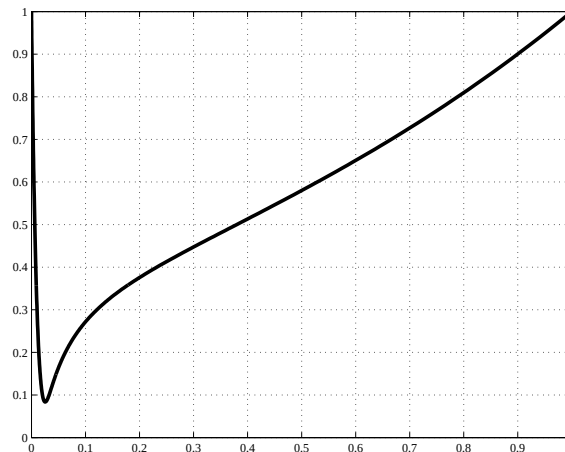


FIGURE 1 – Résultat numérique de (2) pour  $\varepsilon = 0.002$

- 4.° Calculer l'ordre dominant de la solution dans chacune des deux couches (sans chercher à calculer les constantes d'intégration).
- 5.° En écrivant soigneusement les conditions de raccord déterminer les zones de recouvrement et les constantes d'intégration. Écrire la solution composite (toujours à l'ordre dominant).

## Méthodes Mathématiques pour la Mécanique

Examen de M2R (rattrapage) - 25 novembre 2010 - Corrigé

### Premier problème

- 1.° Ce sont les mêmes notations correspondant aux mêmes changements de variable que dans le cours, on utilise donc directement les résultats. On a ainsi :

$$\begin{aligned} y(t) &= Y_0(t, \tau) + \varepsilon Y_1(t, \tau) + o(\varepsilon) \\ y'(t) &= \frac{\partial Y_0}{\partial t} + \varepsilon \left( \frac{\partial Y_0}{\partial \tau} + \frac{\partial Y_1}{\partial t} \right) + o(\varepsilon) \\ y''(t) &= \frac{\partial^2 Y_0}{\partial t^2} + \varepsilon \left( 2 \frac{\partial^2 Y_0}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} \right) + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

On reporte ces expressions dans l'équation différentielle de départ en se limitant au premier ordre en  $\varepsilon$  :

$$\frac{\partial^2 Y_0}{\partial t^2} + \varepsilon \left( 2 \frac{\partial^2 Y_0}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} \right) + (Y_0 + \varepsilon Y_1) - \varepsilon Y_0^3 + o(\varepsilon) = 0$$

On en déduit les équations que doivent satisfaire  $Y_0$  et  $Y_1$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Y_0}{\partial t^2} + Y_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + Y_1 = -2 \frac{\partial^2 Y_0}{\partial t \partial \tau} + Y_0^3 \end{cases} \quad (3)$$

- 2.° La première équation de (3) s'intègre sans difficulté. En notation complexes, on obtient :

$$Y_0(t) = A(\tau)e^{it} + \overline{A}(\tau)e^{-it} \quad (4)$$

avec les notations de l'énoncé.

- 3.° Pour déterminer l'équation que satisfait la "constante"  $A(\tau)$ , la démarche est toujours la même. On reporte dans la deuxième équation de (3) la solution (4) et on annule les termes séculaires de sorte à ce que le développement asymptotique initial  $y = Y_0 + \varepsilon Y_1 + o(\varepsilon)$  soit effectivement valide. Cette deuxième équation s'écrit :

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + Y_1 = -2iA'e^{it} + A^3e^{3it} + 3A^2\overline{A}e^{it} + c.c.$$

en notant comme d'habitude "*c.c.*" le complexe conjugué de l'expression précédente. La fréquence propre est 1, aussi annuler le terme séculaire revient à imposer :

$$-2iA' + 3A^2\bar{A} = 0$$

On cherche les solutions de cette équation différentielle sous forme polaire :  $A(\tau) = \rho(\tau) \exp i\theta(\tau)$ .  
On trouve :

$$-2i\rho' + 2\theta'\rho + 3\rho^3 = 0$$

Cette équation est écrite dans le plan complexe. En séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient :

$$\rho' = 0 \quad \text{et} \quad (2\theta' + 3\rho^2)\rho = 0$$

La première équation donne  $\rho = \rho_0$  avec  $\rho_0$  une constante. En supposant cette constante non nulle (hypothèse raisonnable, sinon on a  $Y_0 \equiv 0$ ) la seconde équation s'écrit :

$$2\theta' + 3\rho_0^2 = 0$$

qui s'intègre en :

$$\theta = \theta_0 - \frac{3}{2}\rho_0^2\tau$$

avec  $\theta_0$  une constante. Des expressions précédentes, on obtient :

$$A(\tau) = \rho_0 \exp \left[ i \left( \theta_0 - \frac{3}{2}\rho_0^2\tau \right) \right]$$

d'où finalement :

$$Y_0 = 2\rho_0 \cos \left( t + \theta_0 - \frac{3}{2}\rho_0^2\tau \right) \quad (5)$$

avec, donc,  $\rho_0$  et  $\theta_0$  deux constantes d'intégration (à déterminer par les conditions initiales du problème).

4.° On écrit les conditions initiales. Vu l'expression de  $y'(t)$  rappelée à la première question, ces conditions se traduisent par :

$$Y_0(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Y_0}{\partial t}(0,0) = 0$$

L'expression (5) conduit aux équations :

$$2\rho_0 \cos \theta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \sin \theta_0 = 0$$

On peut prendre  $\theta_0 = 0$  d'où  $\rho_0 = 1/2$ , sachant que l'autre choix ( $\theta = \pi$  et  $\rho_0 = -1/2$ ) conduit *in fine* au même résultat pour  $Y_0$ . Finalement, on trouve donc :

$$Y_0(t, \tau) = \cos \left( t - \frac{3\tau}{8} \right) \quad (6)$$

Dans l'exemple traité, l'échelle lente ne modifie pas l'amplitude ou la fréquence de l'oscillation rapide, comme c'est souvent le cas, mais la phase, voir figure ci-après.

Il est intéressant de regarder numériquement l'approximation ainsi faite. L'approximation naïve de l'équation initiale consiste à négliger simplement  $\varepsilon$ . On obtient alors sans difficulté la solution  $y_n = \cos(t)$ . La figure 2 donne la comparaison entre la solution exacte (i.e. calculée

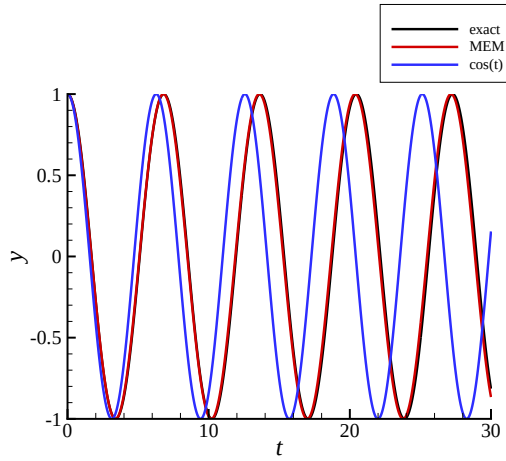


FIGURE 2 – Comparaisons entre les solutions exacte (en noir),  $Y_0$ , comme donnée par (6), (en rouge) et l'approximation naïve en  $\cos(t)$  en bleu, pour  $\varepsilon = 0.2$ .

numériquement), l'approximation  $Y_0$  donnée par la méthode des échelles multiples à l'ordre dominant, relation (6), et la solution naïve  $y_n = \cos(t)$ . On a pris  $\varepsilon = 0.2$ , pour des valeurs inférieures, il est très difficile de distinguer la solution exacte de l'approximation  $Y_0$ .

- 5.° L'équation générale pour  $Y_1$  est écrite dans le système (3). Il n'y a plus qu'à remplacer le terme de droite par la valeur connue (6) de  $Y_0$ . On a :

$$\frac{\partial Y_0}{\partial t} = -\sin\left(t - \frac{3\tau}{8}\right) \quad \frac{\partial^2 Y_0}{\partial t \partial \tau} = \frac{3}{8} \cos\left(t - \frac{3\tau}{8}\right)$$

d'où l'équation :

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + Y_1 = -\frac{3}{4} \cos\left(t - \frac{3\tau}{8}\right) + \cos^3\left(t - \frac{3\tau}{8}\right) \quad (7)$$

Pour les conditions aux limites, on introduit les développements asymptotiques, comme on l'a fait dans l'équation différentielle. Ainsi la condition  $y(0) = 1$  se traduit par :  $Y_0(0,0) + \varepsilon Y_1(0,0) + o(\varepsilon) = 1$ , d'où l'on tire :  $Y_0(0,0) = 1$  que l'on a déjà utilisé pour déterminer la solution à l'ordre

dominant et  $Y_1(0,0) = 0$ . La deuxième condition  $y'(0) = 0$  se traduit par :

$$\frac{\partial Y_0}{\partial t}(0,0) + \varepsilon \left( \frac{\partial Y_0}{\partial \tau}(0,0) + \frac{\partial Y_1}{\partial t}(0,0) \right) + o(\varepsilon) = 0$$

La relation à l'ordre dominant a déjà été écrite et utilisée précédemment, il reste en fait :

$$\frac{\partial Y_1}{\partial t}(0,0) = -\frac{\partial Y_0}{\partial \tau}(0,0)$$

L'expression de  $Y_0$  donnée par (6) montre que le terme de droite est nul, les conditions aux limites finales pour  $Y_1$  sont donc :

$$Y_1(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Y_1}{\partial t}(0,0) = 0$$

6.° Au final, le problème à résoudre pour  $Y_1$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + Y_1 &= -\frac{3}{4} \cos \left( t - \frac{3\tau}{8} \right) + \cos^3 \left( t - \frac{3\tau}{8} \right) \\ Y_1(0,0) &= 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Y_1}{\partial t}(0,0) = 0 \end{aligned}$$

La technique de résolution consiste à utiliser la méthode de la variation de la constante.

## Second problème

1.° Le petit paramètre  $\varepsilon$  est devant le terme dont l'ordre de dérivation est maximal. Dès lors si l'on simplifie d'emblée l'équation on se retrouve avec une équation différentielle d'ordre inférieur (1 au lieu de 2 dans le cas présent) et donc avec une condition aux limites en trop. Il s'agit donc bien d'un problème de perturbation singulière.

2.° On note  $y$  la solution extérieure, sensée être une approximation de la solution exacte dans une certaine région (dite extérieure) en dehors de  $x = 0$ , endroit de la couche limite. A l'ordre dominant, on peut écrire :

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + o(\varepsilon)$$

et, comme dans le cours, on suppose que ce développement est régulier (dans la région extérieur) au sens où l'on peut dériver cette équation avec conservation des ordres de grandeur. Bien sûr, rien ne garantit que le terme suivant l'ordre dominant  $y_0$  soit en  $O(\varepsilon)$ . On se contente en fait de l'ordre dominant  $y(x) = y_0(x) + o(1)$ , ce que l'on reporte dans l'équation différentielle :

$$\varepsilon^2 (y_0'' + o(1)) + x^2 (y_0' + o(1)) - \left( x^2 + \varepsilon^{1/2} \right) ((y_0'' + o(1))) = 0$$

ce qui conduit à :

$$x^2 y_0' - x^2 y_0 = 0$$

à l'ordre dominant. Sauf peut-être en  $x = 0$  (ce qui n'est pas une restriction, vu que la couche limite est supposée en ce point et l'on cherche en fait ici la solution extérieure), on a donc  $y_0' - y_0 = 0$  d'où  $y_0 = \lambda \exp(x)$  avec  $\lambda$  une constante d'intégration. On a  $y_0(1) = 1$  ce qui permet de calculer  $\lambda$ ; on trouve finalement :

$$y_0(x) = e^x - 1 \quad (8)$$

pour l'ordre dominant de la solution extérieure.

- 3.° Pour la solution interne, on procède comme dans le cours, on effectue un changement d'échelle :  $x = X\varepsilon^p$  avec  $p > 0$  un réel à déterminer. On pose :  $Y(X) = y(x)$  et on suppose que dans la zone interne (dans la couche limite), le développement  $Y(X) = Y_0(X) + o(1)$  est régulier dans le même sens que précédemment (sauf qu'ici on se place dans la couche limite et on travaille avec la variable interne  $X$ ). En reportant ce développement dans l'équation différentielle où l'on a effectué le changement de variable  $x = X\varepsilon^p$ , on obtient :

$$\varepsilon^{2-2p} (Y_0'' + o(1)) + X^2 \varepsilon^{2p} \varepsilon^{-p} (Y_0' + o(1)) - X^2 \varepsilon^{2p} (Y_0 + o(1)) - \varepsilon^{1/2} (Y_0 + o(1)) = 0$$

Les différentes puissances de  $\varepsilon$  sont :  $2 - 2p$ ,  $p$ ,  $2p$  et  $1/2$ . On reporte ces différentes puissances dans le diagramme les donnant en fonction de  $p$ , voir figure 3. On constate que deux valeurs de  $p$

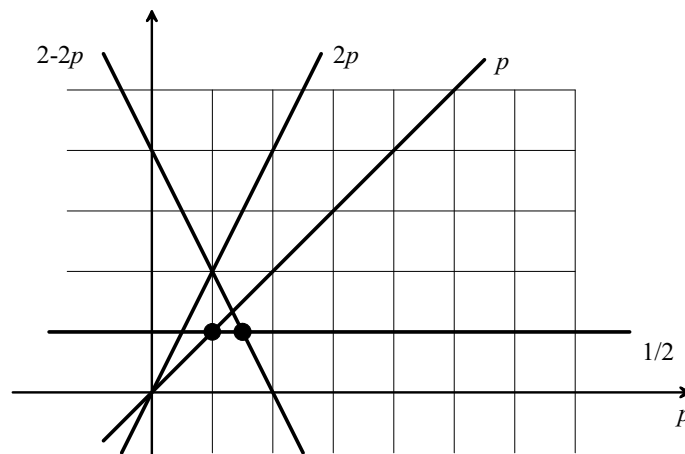


FIGURE 3 – Puissances de  $\varepsilon$  en fonction de  $p$ . Deux valeurs de  $p$  donnent deux termes de même grandeur :  $p = 1/2$  et  $p = 3/4$ .

permettent d'équilibrer l'ordre de grandeur de deux contributions différentes dans l'équation

différentielle :  $p = 1/2$  et  $p = 3/4$ . Ces deux valeurs correspondent à deux échelles différentes pour la variable interne, plus  $p$  est grand plus il faut dilater pour se ramener à une variable en  $O(1)$ . On en déduit l'existence *a priori* de deux couches : une couche interne pour  $p = 3/4$  et une couche intermédiaire (coincée entre la couche interne et la zone extérieure) pour  $p = 1/2$ . La courbe donnant la solution exacte portée sur la figure 1 de l'énoncé confirme la présence de ces deux couches.

- 4.° Posons  $x = \xi \varepsilon^{1/2}$  et  $Z(\xi) = y(x)$  pour la couche intermédiaire. A l'ordre dominant, on reporte  $Z(\xi) = Z_0(\xi) + o(1)$  dans l'équation. On obtient :

$$\varepsilon^{2-2+1/2} (Z_0'' + o(1)) + \xi^2 \varepsilon^{1/2} (Z_0' + o(1)) - \xi^2 \varepsilon (Z_0 + o(1)) - \varepsilon^{1/2} (Z_0 + o(1)) = 0$$

soit

$$\xi^2 Z_0' - Z_0 = 0$$

à l'ordre dominant. La solution de cette équation ne pose pas de difficulté, on trouve :

$$Z_0(\xi) = K e^{-1/\xi} \quad (9)$$

avec  $K$  une constante d'intégration.

Pour la couche interne, on pose  $x = \xi \varepsilon^{3/4}$  et  $y(x) = Z(\xi)$ . Comme ci-dessus, on reporte  $Z(\xi) = Z_0(\xi) + o(1)$  dans l'équation et on trouve :

$$\varepsilon^{1/2} (Z_0'' + o(1)) + \xi^2 \varepsilon^{3/4} (Z_0' + o(1)) - \xi^2 \varepsilon^{3/2} (Z_0 + o(1)) - \varepsilon^{1/2} (Z_0 + o(1)) = 0$$

d'où  $Z_0'' - Z_0 = 0$  à l'ordre dominant. La solution générale s'écrit

$$Z_0(\xi) = A e^\xi + B e^{-\xi} \quad (10)$$

avec  $A$  et  $B$  deux constantes d'intégration.

- 5.° On a deux raccords à écrire : un premier entre la solution interne et la solution intermédiaire et un second entre la solution intermédiaire et la solution extérieure déterminée précédemment (8).

Commençons donc par la solution interne qui doit d'un côté vérifier la condition aux limites  $Z_0(0) = 1$ , d'où :  $A + B = 1$  et de l'autre se raccorder avec la solution intermédiaire (9) sur un certain domaine de recouvrement. Comme toujours, on suppose que le recouvrement se fait pour la variable interne grande. On suppose donc  $\xi \gg 1$  soit  $x \gg \varepsilon^{3/4}$ . Pour que le raccord ait lieu, il ne peut y avoir de comportement exponentiellement croissant. On impose donc  $A = 0$ , il reste donc  $B = 1$  en vertu de la condition en 0. Pour  $x \gg \varepsilon^{3/4}$ , la solution interne est en  $\exp(-x \varepsilon^{-3/4})$  et la solution intermédiaire en  $K e^{-1/X} = K e^{-\varepsilon^{1/2}/x}$ . La première est exponentiellement petite, pour que le raccord puisse avoir lieu il faut que la seconde soit elle aussi



exponentiellement petite ce qui impose  $x \ll \varepsilon^{1/2}$ . Ainsi le premier domaine de recouvrement est :

$$\varepsilon^{3/4} \ll x\varepsilon^{1/2}$$

et le raccord vaut 0 (valeur commune des deux solutions sur ce domaine de recouvrement).

Regardons maintenant le raccord entre la solution intermédiaire et la solution extérieure. Là aussi, on suppose qu'il faut prendre la variable intermédiaire grande pour se situer dans la zone de recouvrement. On prend donc  $x \gg \varepsilon^{1/2}$ . Ainsi la solution intermédiaire est exponentiellement proche de  $K$  avec la condition  $x \gg \varepsilon^{1/2}$ . Cette solution doit se raccorder avec  $\exp(x-1)$  qui est la solution extérieure. On impose *a priori* la condition usuelle  $x \ll 1$  ce qui donne le domaine de recouvrement et la condition de raccord :

$$\varepsilon^{1/2} \ll x \ll 1 \quad \text{et} \quad K = e^{-1}$$

Pour obtenir la solution composite, on procède comme dans le cours, on additionne les solutions dans chaque zone et on retranche les raccords (pour ne pas les compter deux fois). On obtient ainsi :

$$y_{c,0}(x) = \exp(x-1) + \exp(-1 - \varepsilon^{1/2}/x) - \exp(-1) + \exp(-x/\varepsilon^{3/4})$$

pour la solution composite à l'ordre dominant. On peut résumer l'ensemble des résultats pour les diverses solutions :

$$\begin{cases} y_0(x) = \exp(x-1) \\ Y_0(x) = \exp(-x/\varepsilon^{3/4}) \\ Z_0(x) = \exp(-1 - \varepsilon^{1/2}/x) \\ y_{c,0}(x) = \exp(x-1) + \exp(-1 - \varepsilon^{1/2}/x) - \exp(-1) + \exp(-x/\varepsilon^{3/4}) \end{cases} \quad (11)$$

pour respectivement les solutions extérieure, intérieure, intermédiaire et composite, toutes déterminées à l'ordre dominant.

En se limitant à l'ordre dominant comme indiqué dans l'énoncé, il est intéressant de positionner la solution en comparaison des approximations dans les différentes régions (intérieure, intermédiaire et extérieure). C'est l'objet du graphe de gauche de la figure 4 où l'on trouvera les représentations des solutions intérieure, intermédiaire et extérieure comparées à la solution composite pour  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ .

Maintenant, il est également important de regarder comment la solution composite se compare avec la solution "exacte", en fait obtenue numériquement par résolution de l'équation différentielle complète (2). Cette comparaison est donnée sur la figure 4, graphe de droite, pour  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ .

On constate que la solution composite se compare très bien avec la solution numérique. A noter toutefois un écart croissant dans la solution extérieure. Pour améliorer ce comportement, il faut

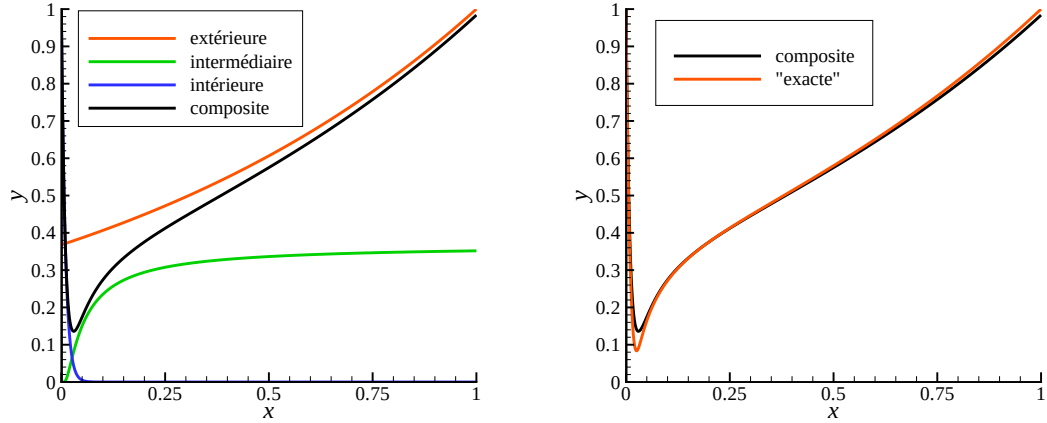


FIGURE 4 – A gauche : solutions intérieure, intermédiaire, extérieure comparées à la solution composite, toutes calculées à l'ordre dominant pour  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ . A droite : comparaison entre la solution composite et la solution numérique de l'équation complète pour  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$  à l'ordre dominant.

passer à l'ordre suivant. On montre que l'ordre dominant est en  $O(\sqrt{\varepsilon})$ . Tous calculs faits, les expressions analytiques sont :

$$\begin{cases} y_1(x) = \exp(x-1) + \sqrt{\varepsilon} \left[ \left(1 - \frac{1}{x}\right) \exp(x-1) \right] \\ Y_1(x) = \exp(-x/\varepsilon^{3/4}) + o(\sqrt{\varepsilon}) \\ Z_1(x) = \exp(-1 - \varepsilon^{1/2}/x) + \sqrt{\varepsilon} \exp(-1 - \varepsilon^{1/2}/x) \left(1 + \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\ y_{c,1}(x) = y_1(x) + Y_1(x) + Z_1(x) - \exp(-1) \left(1 + x + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right) \end{cases} \quad (12)$$

Les allures des approximations à cet ordre  $O(\sqrt{\varepsilon})$  sont données sur le graphe de gauche de la figure 5, toujours pour la même valeur de  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ . Le graphe de droite donne la comparaison entre la solution exacte et la solution composite  $y_{c,1}$  à cet ordre. On constate une nette amélioration surtout dans la zone extérieure.

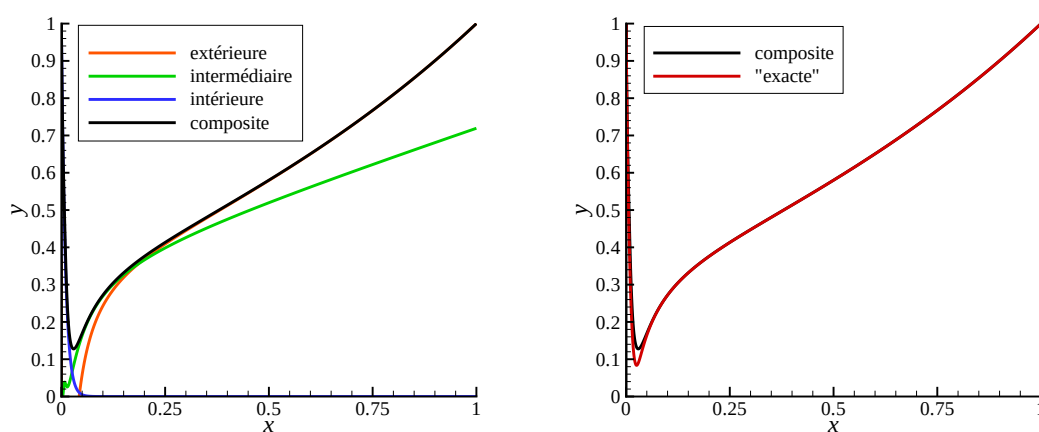


FIGURE 5 – A gauche, solutions intérieure, intermédiaire, extérieure comparées à la solution composite, toutes calculées à l'ordre  $O(\sqrt{\varepsilon})$  pour  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ . A droite : comparaison toujours à l'ordre  $O(\sqrt{\varepsilon})$  entre la solution composite et la solution numérique de l'équation complète pour  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ .