

Ce chapitre est consacré à un exemple simple dans lequel d'une part le spectre se détermine de manière analytique et d'autre part la forme de mode normal n'est pas la seule possible.

1 Equations de départ

On considère un écoulement bidimensionnel instationnaire non visqueux, on considère le fluide comme un gaz parfait. En écrivant l'équation de l'énergie pour l'entropie S , les équations s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \\ \rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} + \vec{\nabla} P = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) S = 0 \end{cases} \quad (1)$$

On rappelle aussi que dans les hypothèses de gaz parfait calorifiquement parfait, on a les deux relations suivantes :

$$S = C_v \log \frac{P}{\rho^\gamma} \quad \frac{P}{\rho} = rT \quad (2)$$

L'écoulement de base dont on étudie la stabilité est supposé mono-dimensionnel et constant. On se place en géométrie cartésienne et on choisit l'axe Ox aligné avec la direction de cet écoulement de base. Ainsi celui-ci est caractérisé par les grandeurs $\bar{U}$, $\bar{\rho}$ et $\bar{T}$, respectivement la vitesse, la masse volumique et la température ; on suppose ces grandeurs constantes (indépendantes des coordonnées spatiales x et y et de t).

Conformément à la technique générale des petites perturbations on superpose à cet écoulement de base une fluctuation de type εY_1 , on reporte l'écoulement instantané (écoulement de base + fluctuation) dans les équations (1) et (2) dont on ne conserve que les termes d'ordre 1, c'est-à-dire en $O(\varepsilon)$. Au final, on aboutit au système suivant.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \bar{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{\rho} \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \bar{\rho} \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{U} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \bar{\rho} \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{U} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial S}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Comme toujours pour un problème de stabilité, l'écoulement de base, représenté par $\bar{U}$ et $\bar{\rho}$, est une donnée du problème, la perturbation est l'inconnue.

2 Modes acoustiques, mode entropique et mode de vortacité

2.1 Séparation des équations

Le système précédent (3) regroupe 4 équations couplées pour ρ, u, v, p, S sachant qu'en fait que les grandeurs ρ , p et S sont reliées entre elles, voir (2). L'objectif de cette section est de

découpler le problème. On a déjà l'équation pour l'entropie qui est isolée. On note D l'opérateur différentiel :

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x}$$

Pour l'entropie on obtient simplement :

$$DS = 0 \quad (4)$$

On introduit ensuite la vorticité Ω définie par :

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

On dérive alors par rapport à x l'équation de quantité de mouvement sur Oy que l'on retranche à la dérivée par rapport à y de l'équation de quantité de mouvement sur Ox . Après simplifications, on trouve simplement :

$$D\Omega = 0 \quad (5)$$

soit la même équation que pour l'entropie.

On cherche maintenant à écrire une équation pour la pression. On réécrit les trois premières équations du système (3) avec l'opérateur D :

$$D\rho + \bar{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

$$\bar{\rho}Du + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\bar{\rho}Dv + \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Une simple élimination de u et v dans ces équations conduit à $D^2\rho - \Delta P = 0$ où Δ désigne l'opérateur laplacien. Par ailleurs, la première équation de (2)   crite en petite perturbation s'énonce :

$$S = C_v \left(\frac{p}{P} - \gamma \frac{\rho}{\bar{\rho}} \right)$$

Comme $DS = 0$, voir (4), on a $D^2p = \bar{a}^2 D^2\rho$ où $\bar{a}$ désigne la célérité du son qui, dans nos hypothèses de fluide parfait calorifiquement parfait, s'écrit $\bar{a}^2 = \gamma \bar{P}/\bar{\rho}$. On en déduit finalement une équation pour la pression seulement :

$$(D^2 - \bar{a}^2 \Delta) p = 0 \quad (6)$$

2.2 Interprétation physique

L'équation pour la pression (6) est du type équation d'onde qui admet généralement deux familles de solutions. L'équation pour la vorticité (et donc celle, identique, pour l'entropie) est du type équation de propagation avec une famille de solution pour chacune des deux équations. Pour ces raisons, on dit que les fluctuations en fluide parfait peuvent se décomposer en fluctuations de type acoustique (avec deux familles possibles), de type tourbillonnaire (liée à la vorticité) ou de type entropique.

Pour préciser ces notions, jusque là assez floues, prenons la forme de mode normal en supposant que chaque quantité fluctuante q puisse se décomposer en :

$$q = \hat{q} e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \quad (7)$$

ce qui est *a priori* licite vu que l'on a un système différentiel à coefficients constants. Dans cette forme de mode normal, $\hat{q}$ est une amplitude complexe et k_x , k_y et ω sont des nombres complexes *a priori*.

Pour l'entropie, l'équation (4) se réduit à $-i\omega\hat{S} + ik_x\bar{U}\hat{S} = 0$. Une solution non nulle existe donc si :

$$k_x = \frac{\omega}{\bar{U}}$$

L'onde entropique est donc transportée par l'écoulement de base, sa vitesse de phase est strictement égale à $\bar{U}$.

Pour la vorticité, on trouve bien sûr le même nombre d'onde longitudinal k_x et on a la même conclusion.

La situation est plus complexe pour l'acoustique. La forme de mode normal introduite dans (6) conduit à l'existence d'ondes acoustiques réelles ($k_x \in \mathbb{R}$) si $\omega^2 - k_y^2(\bar{a}^2 - \bar{U}^2) \geq 0$. Cette condition étant satisfaite, on note alors $\Gamma^2 = \omega^2 - k_y^2(\bar{a}^2 - \bar{U}^2)$, on trouve deux solutions pour k_x :

$$k_x^{(1)} = \frac{-\omega\bar{U} - \bar{a}\Gamma}{\bar{a}^2 - \bar{U}^2} \quad k_x^{(2)} = \frac{-\omega\bar{U} + \bar{a}\Gamma}{\bar{a}^2 - \bar{U}^2}$$

ce qui correspond "en gros"¹ (notamment pour $k_y = 0$, c'est- dire en mono-dimensionnel)   une onde acoustique qui remonte l'écoulement de base et une autre qui va dans le même sens.

La démarche mise en œuvre ci-dessus, consistant d'abord à chercher à "diagonaliser" le système différentiel de départ (1) par séparation des inconnues, permet de donner des significations physiques aux différentes équations obtenues. En revanche, par cette méthode, il n'est pas sûr que des solutions particulières ne soient pas oubliées. En effet, si l'un des nombres longitudinaux k_x du système acoustique (plus précisément de l'équation pour la pression) co incide avec le nombre d'onde longitudinal de la vorticité, il faut s'assurer que les vecteurs propres obtenus forment bien une base. Comme on l'a rappelé dans la partie ??, s'il y a des racines multiples, la dimension de l'espace propre associé n'est pas forcément identique à l'ordre de multiplicité de cette racine. Si ce cas se produit effectivement, les équations données ci-dessus (4), (5) et (6) ne sont pas indépendantes, il faut alors les traiter globalement. C'est ce qui est fait dans la suite de ce chapitre : on commence par vérifier que dans le cas général on retrouve les résultats ci-dessus puis on étudie de près la situation évoquée d'une racine multiple.

3 Diagonalisation globale

On part cette fois du système complet (3) dans lequel on introduit la forme de mode normal (7). Comme on le constate à partir des équations (1) et (2), le système est globalement de dimension 4. Après quelques manipulations algébriques (  reproduire par l'étudiant), on réduit le système d'équations (3)   un système algébrique que l'on peut mettre sous la forme :

$$(\mathbf{M}_1 - k_x \mathbf{M}_2) \hat{\mathbf{Z}} = 0 \quad (8)$$

1. Le lecteur pourra s'amuser à regarder de près l'expression de $k_x^{(2)}$ et en particulier son signe

où k_x apparaît bien sous la forme d'une valeur propre du problème (précisément de la matrice $\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{M}_1$, la matrice $\mathbf{M}_2$ étant en subsonique toujours inversible), $\hat{\mathbf{Z}}$ est le vecteur (4,1) de coordonnées $(\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{v}, \hat{s})$ et $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$ sont deux matrices (4,4) fonction de l'écoulement de base et des nombres k_y et ω . Le système d'ordre 4 écrit en (8) correspond précisément à la forme (??) sauf que le problème ici est purement algébrique. Enfin, il est important de souligner que ce système (8) d'ordre 4 correspond au système réduit minimal ce qui fait que l'on sait déjà que l'ensemble des solutions du problème est effectivement un espace vectoriel de dimension 4. On a explicitement :

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\omega}{\bar{a}^2} & 0 & k_y \bar{\rho} & \frac{\bar{\rho}}{C_p} \omega \\ 0 & -\bar{\rho} \omega & 0 & 0 \\ k_y & 0 & -\bar{\rho} \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\bar{U}}{\bar{a}^2} & -\bar{\rho} & 0 & \frac{\bar{\rho} \bar{U}}{C_p} \\ -1 & -\bar{\rho} \bar{U} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\rho} \bar{U} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{U} \end{pmatrix}$$

Pour calculer les valeurs propres k_x de (8), on résout $\det(\mathbf{M}_1 - k_x \mathbf{M}_2) = 0$ ce qui conduit à quatre solutions :

$$k_x^{(1)} = \frac{-\omega \bar{U} - \bar{a} \Gamma}{\bar{a}^2 - \bar{U}^2}, \quad k_x^{(2)} = \frac{-\omega \bar{U} + \bar{a} \Gamma}{\bar{a}^2 - \bar{U}^2}, \quad k_x^{(3)} = k_x^{(4)} = \frac{\omega}{\bar{U}}$$

où l'on a posé $\bar{a} = \sqrt{\gamma r \bar{T}}$, la vitesse du son d'ordre 0 (γ est le rapport des chaleurs spécifiques, on a $\gamma = 1, 4$ pour les gaz usuels), et Γ la grandeur

$$\Gamma = \sqrt{\omega^2 - k_y^2 (\bar{a}^2 - \bar{U}^2)}$$

On a donc trouvé deux racines simples $k_x^{(1)}$ et $k_x^{(2)}$ et une racine double $k_x^{(3)} = k_x^{(4)}$. On retrouve bien sûr les 4 valeurs propres trouvées précédemment en séparant le problème en équations différentielles (dont l'indépendance, rappelons-le, n'a pas été vérifiée). Dans tout cet exemple, on suppose l'écoulement de base subsonique ce qui fait que l'on a $\bar{a}^2 - \bar{U}^2 > 0$. Aux quatre valeurs propres données ci-dessus, correspondent les quatre vecteurs propres :

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} -\bar{\rho}(\bar{U} k_x^{(1)} - \omega) \\ k_x^{(1)} \\ k_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} -\bar{\rho}(\bar{U} k_x^{(2)} - \omega) \\ k_x^{(2)} \\ k_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{V}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ k_y \\ -\frac{\omega}{\bar{U}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{V}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notamment quand les nombres k_x , k_y et ω sont des nombres réels, ces quatre vecteurs propres ont un sens physique clair et explicité au paragraphe précédent : $k_x^{(1)}$ caractérise l'onde acoustique remontant l'écoulement de base, $k_x^{(2)}$ l'onde acoustique se propageant dans le sens de l'écoulement de base, $k_x^{(3)}$ caractérise l'onde d'entropie et $k_x^{(4)}$ l'onde de vorticité. Dans le cas où ces quatre vecteurs sont linéairement indépendants, ils constituent une base propre de l'espace vectoriel des solutions, ainsi la solution générale $\mathbf{Y}_1$ de (8) se met sous la forme :

$$\mathbf{Y}_1 = \sum_{j=1}^4 C_j \mathbf{V}_j \exp i(k_x^{(j)} x + k_y y - \omega t) \quad (9)$$

où les nombres C_j sont des constantes d'intégration.

Donc dans ce cas précis, la forme de mode normal est justifiée tant que les vecteurs $\mathbf{V}_j$ sont linéairement indépendants ce qui est vérifié si le déterminant de la matrice $\mathbf{M}_V$ d'ordre 4 dont les colonnes sont constituées par les coordonnées des vecteurs $\mathbf{V}_j$ est non nul. Avec les expressions des vecteurs propres ci-dessus, un calcul simple donne :

$$\det \mathbf{M}_V = 0 \iff \omega \in \left\{ ik_y \bar{U}, -ik_y \bar{U}, k_y \sqrt{\bar{a}^2 - \bar{U}^2}, -k_y \sqrt{\bar{a}^2 - \bar{U}^2} \right\}$$

Ces valeurs, exprimées en terme de la pulsation ω , représentent les cas où rechercher la perturbation sous forme de mode normal est insuffisante, comme on le montre ci-dessous.

4 Réduction de Jordan

A titre d'exemple, regardons le cas :

$$\omega = ik_y \bar{U}$$

qui est l'une des valeurs pour lesquelles on a $\det \mathbf{M}_V = 0$. Les valeurs propres de (8) sont alors :

$$k_x^{(1)} = -ik_y \frac{1 + \bar{M}^2}{1 - \bar{M}^2} \quad k_x^{(2)} = k_x^{(3)} = k_x^{(4)} = ik_y$$

où $\bar{M}$ est le nombre de Mach d'ordre 0 (lié à l'écoulement de base). On trouve alors une racine simple et une racine triple. L'espace propre associé à la valeur simple est évidemment de dimension 1, on trouve qu'il est engendré par le vecteur $\mathbf{W}_1$ dont l'expression est donnée ci-dessous. En revanche, l'espace propre associé à la valeur propre triple n'est pas de dimension 3, la matrice $\mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_1$ n'est donc pas diagonalisable. Ainsi, rechercher la solution *a priori* sous la forme de mode normal, c'est rechercher la solution dans un espace vectoriel de dimension inférieure à celle de l'espace vectoriel des solutions (ici égale à 4).

On trouve que l'espace propre associé à la valeur propre $k_x^{(2)}$ est de dimension 2 et est engendré par les vecteurs $\mathbf{W}_2$ et $\mathbf{W}_3$. Le dernier vecteur $\mathbf{W}_4$ est cherché de sorte à mettre la matrice $\mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_1$ sous la forme réduite de Jordan, c'est-à-dire tel que l'on ait :

$$(\mathbf{M}_1 - k_x^{(2)} \mathbf{M}_2) \mathbf{W}_4 = \mathbf{M}_2 \mathbf{W}_3$$

Finalement, après avoir choisi deux vecteurs $\mathbf{W}_2$ et $\mathbf{W}_3$ convenables, une base possible est :

$$\mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2\bar{\rho}\bar{U}\bar{a}^2}{\bar{U}^2 + \bar{a}^2} \\ 1 \\ i\frac{\bar{a}^2 - \bar{U}^2}{\bar{U}^2 + \bar{a}^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{W}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{W}_4 = \begin{pmatrix} \frac{i\bar{\rho}\bar{U}}{k_y} \\ \frac{1}{k_y} \\ \frac{1+i}{k_y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans cette base, l'opérateur linéaire $\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{M}_1$ est effectivement sous une forme de Jordan :

$$\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} k_x^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ik_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ik_y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ik_y \end{pmatrix}$$

Dès lors, on peut revenir à la base primitive et exprimer, comme dans (9) la forme générale de la solution du problème (toujours dans le cas $\omega = ik_y\bar{U}$) :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 = & \left\{ D_1 \mathbf{W}_1 \exp(ik_x^{(1)}x) + D_2 \mathbf{W}_2 \exp(ik_x^{(2)}x) + \right. \\ & \left. (D_3 + ix D_4) \mathbf{W}_3 \exp(ik_x^{(2)}x) + D_4 \mathbf{W}_4 \exp(ik_x^{(2)}x) \right\} \exp i(k_y y - \omega t) \end{aligned} \quad (10)$$

Cette fois, la perturbation n'est donc pas une combinaison de modes normaux, il existe un terme en $x \exp(ik_x x)$ lié au caractère non diagonalisable du problème. De plus, cette réduction de Jordan “couple” l'équation pour l'acoustique (6) avec l'équation pour la vorticité (5). La séparation du système global en équations différentielles perd dans ce cas son intérêt étant donné qu'elles ne sont pas indépendantes (pour la valeur particulière $\omega = ik_y\bar{U}$).